2014

المتتاليات والمتسلسلات الاقترانية

إعداد: هيام أحمد الدلو
إشراف: د.ماهر القرواني

جامعة القدس المفتوحة | مركز بديا الدراسي

جامعة القدس المفتوحة

كلية التربية

فرع سلفيت

تخصص الرياضيات وأساليب تدريسها

بحث تخرج بعنوان: المتتاليات والمتسلسلات الاقترانية

إعداد الطالبة: هيام أحمد محمود الدلو

إشراف الدكتور: ماهر نظمي القرواني

قدم هذا البحث استكمالاً لمتطلبات الحصول على درجة البكالوريوس في كلية التربية - تخصص الرياضيات وأساليب تدريسها – جامعة القدس المفتوحة

الفصل الدراسي الاول

2014 - 2015 م

المتتاليات
والمتسلسلات الاقترانية

Sequences and Series of Functions

إهدآء

أهديه لـأبي..قُرّة عيني

ولنبضِ فؤادي..أمي

أهديه إليك، أنتَ القريب البعيد

أهديه لخطيبي الذي أحب

مصطفى شتات

ولـ د. ماهر نظمي القرواني

ولكل الكادر الأكاديمي الذي أشرف علي

أرسله مع بآقة ورد لكل من سيتذكرني يوماً

أقدّمه لكل من يحبّني

لصديقاتي

وبكل هيآم لكل هيام أعرفها ولآ أعرفها

ولأنه بحثيَ الأول.. أهديه إليَّ أنا

هيام الدلو

شكر

أبدأُ شكري لذي الجلالة، الله ربي، أشكره سبحانه على جزيل نعمه التي منَّ بها عليَّ وأكرمني بها، وعلى رأسها تلك النعمة المهداة، النبي الأمين صلى الله عليه وعلى آله وصحبه وسلم.

كما أشكر كل من علمني حرفاً في حياتي الدراسية، وأخُصَّ منهم كل من درّسني الرياضيات يوماً، سواء في الصفوف المدرسية أو لآحقاً عندما تخصصتُ الرياضيات في جامعة القدس المفتوحة.

أشكرُ عائلتي على كلّ الدعم الذي قدمته لي، وأعتذرُ منهم جميعاً إنْ ضايقتهم يوماً.

هيام الدلو

الفهرس

مقدمة

الرياضيات علمٌ لا ينضب ولا يُمَلّ، ولا يُكْتّفى منه، هو أحد أكثر العلوم اتساعاً ويشكِّل اللبنة الأساسية لمعظم العلوم الأخرى، كالفيزياء والاقتصاد والحاسوب والهندسة وغيرها الكثير، لذلك سمّيت الرياضيات بأم العلوم، فهي لغة العصر، لغة الدقة والاختصار، يفهمُ رموزها الجميع باختلاف لغاتهم وثقافاتهم.

في هذا البحث اخترتُ أن أتعمّق في احدى جزئيات التحليل الحقيقي، لأتحدّث عن المتتاليات والم تسلسلات الاقترانية بعد المرور سريعاً على العددية منها ، فكان الفصل الاول عن المتتاليات الاقترا نية وتقاربيها النقطي والمنتظم، وخصائص ومعايير التقارب المنتظم، أما الفصل الثاني فكان عن المتسلسلات الاقترانية والاختبارات التي اختصت بها.

أرجو أن أكون قد وفقت في بحثي هذا، وأن يصبح مرجعاً يُستفاد منه في موضوع المتتاليات والمتسلسلات الاقترانية.

متتاليات الاقترانات

الفصل الأول

(1)

الفهرس:

(1-1) المتتاليات الاقترانية

Sequences of Functions

بداية، وعند الحديث عن متتاليات الاقترانات ينبغي أن نمرَّ بنظرةٍ خاطفة على مفهوم المتتاليات.

فالمتتالية (*sequence*) اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ($\mathbb{N}$) وتسمى متتالية غير منتهية، أو مجموعة جزئية من ($\mathbb{N}$) على الصورة $\{1,2,3,...,n\}$ وتسمى متتالية منتهية. وتتبع تسمية المتتاليات إلى نوع المدى.

مثال: لتكن X دالة مجالها $\mathbb{N}$، ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$، عندها تكون X متتالية حقيقية . $(X:\mathbb{N}\to\mathbb{R})$

(الرياضيات العلمي ج2، الحادي عشر، المنهاج الفلسطيني)

ولأنّها اقتران، فلكل عدد طبيعي عدداً حقيقياً واحداً فقط يشار له بالرمز a_n ويسمى بالحد النوني للمتتالية.

<u>لكن</u>، ماذا لو كان المدى عبارة عن حدود تحتوي على متغيّرات؟
إجابة هذا السؤال هي ما سأتحدّث عنه في بحثي هذا.

وهي ما يسمى **"متتاليات الاقترانات"**

لتكن لدينا المجموعة A، متتالية عناصرها عبارة عن اقتران $(F:\mathbb{N}\to A)$ مجاله هو الأعداد الطبيعية، استخدمنا الرمز $f(n)=a_n$ للتعبير عن عناصر المجموعة A. أما للإشارة للمتتالية ككل يستخدم أحد الرموز الاتية:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \{a_n\}_{n\in N} \quad , \text{or} \quad a_1,a_2,a_3,...$$

<u>أمثلة على المتتاليات العددية:</u>

$$\left\{-1,\frac{1}{2},\frac{-1}{3},\frac{1}{4},...\right\}: a_n=\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},...\right\}: a_n=\frac{n}{n+1}$$

في ما سبق تحدّثنا عن المتتاليات العددية، أي تلك التي تكون عناصرها عبارة عن مقدار ثابت، ولكنّ الأمر يختلف اذا فرضن ا أن عناصر المتتالية عبارة عن اقترانات، لأن الاقتران معرف على مجال معين وتعتمد قيمة الاقتوان على المتغير في ذلك المجال، فمثلاً إذا تغيّرت قيمة x نحصل على قيم جديدة لعناصر المتتالية وبالتالي متتالية جديدة تختلف عن سابقتها.

فيما يلي سيقتصر تركيزنا على المتتاليات الاقترانية (الدّالية، التابعية) لتصبح المجموعة A عبارة عن مجموعة عناصرها اقترانات.

| تعريف:

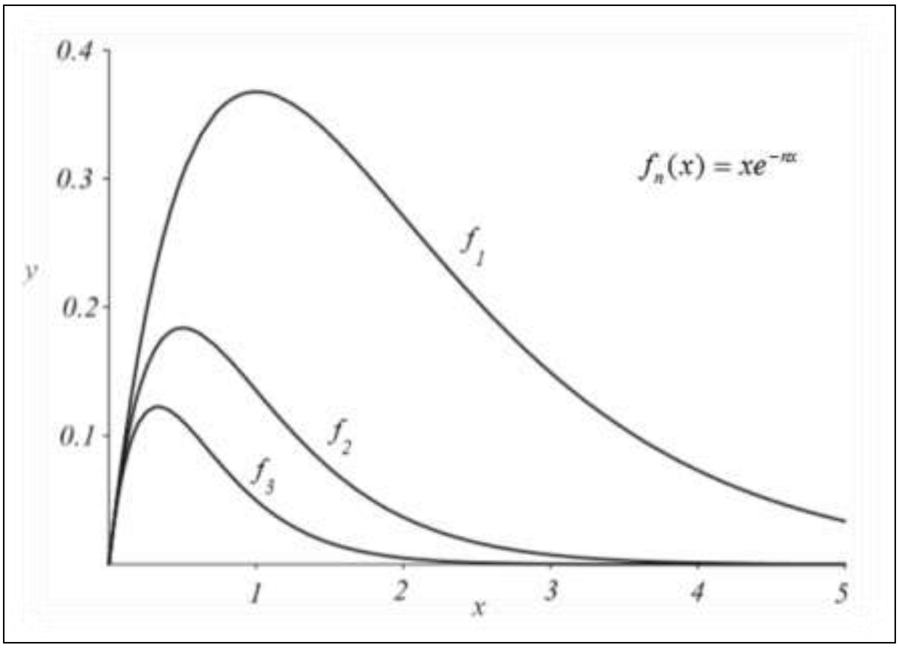
متتالية الاقترانات (*Sequence of Functions*): لتكن $D \subseteq \mathbb{R}$ مجموعة معطاة، افترض أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد اقتران $f_n : D \to \mathbb{R}$ ، تسمى المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **متتالية اقترنات** وتكون عناصرها $f_1, f_2, f_3, \dots$ ، تؤدي الى متتالية من الأرقام الحقيقية يرمز لها بالرمز $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $x \in D$.

لاحظ أنه $\forall x \in D$ تكون $\{f_n(x)\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية، وإذا تغيرت قيمة x تنتج $\{f_n(x)\}$ جديدة وتحتاج الى بحث جديد.

<u>أمثلة على المتتاليات الاقترانية:</u>

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, x \in \mathbb{R}: f_1 = \frac{x}{1+x}, f_2 = \frac{2x}{1+2x}, \dots$$

$$f_n(x) = |x|^n, x \in (-1,1): f_1 = |x|, f_2 = |x|^2, \dots$$



(1 2) التقارب النقطي والمنتظم

Pointwise and Uniform Convergence

في المتتاليات العددية كنّا نبحث فيما اذا كانت نهايتها موجودة أم لا، أو بلغةٍ أخرى كنا نبحث فيما اذا كانت تقاربية ام تباعدية، فتكون المتتالية تقاربية اذا كانت نهايات المتتاليات الجزئية منها متساوية وإلا فإنها ليست تقاربية ـ أي تباعدية ـ.

ولكنَّ الأمر يختلف اختلافاً كبيراً مع متتاليات الاقترانات، لكونها تعتمد على قيمة المتغير x . لكنْ، ماذا لو أوجدنا نهايتها عند قيمة معينة للمتغير x مثل x_0 !، في مثل هذه الحالة، أي عند تعويض x_0 في الاقترانات تتحول معنا متتاليات الاقترانات الى أخرى عددية بعناصر حقيقية، وبهذا نتمكن من دراسة تقاربها وتباعدها كما كنا نفعل في المتتاليات العددية.

| تعريف:

التقارب النقطي (Pointwise Convergence): اذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية اقترانية حيث أن $f_n : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ ، نقول عن $\{f_n(x)\}$ أنها متقاربة نقطياً عند $x = x_0 : x_0 \in D$ إذا كانت المتتالية العددية $\{a_n\} = \{f_n(x_0)\}$ متقاربة . ولتكن $\forall x_0 \in D_0 \subseteq D$.

[حيث أن D_0 هي المجموعة التي تتكون من كل $x \in D$ وتجعل $\{f_n(x)\}$ متقاربة في $\mathbb{R}$]

ملاحظة:

ليكن لدينا المتتالية الاقترانية التالية :

$$\{f_n(x)\} = \frac{x^n}{1+x^{n-1}}$$

*لو أننا قمنا بتثبيت $x = x_0$ ولتكن $x_0 = 2$ ، فإن المتتالية الناتجة تكون:

$$\{a_n\} = \{f_n(2)\} = \frac{2^n}{1+2^{n-1}}$$

*ولو أننا قمنا بتثبيت $n = n_0$ ولتكن $n_0 = 3$ فإن الناتج يكون اقتراناً هو:

$$f_3(x) = y(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$$

بناءً على ذلك، فإن $\{f_n(x)\}$ تمتلك خواص المتتاليات العددية، بالاضافة لخواص الاقترانات، ويضاف عليها خواص تنتج عن اجتماعهما معاً

ليكن $f : D_0 \to \mathbb{R}$ تكون $\{f_n\}$ تتقارب الى f على D_0 إذا كان لكل $x \in D_0$ ، المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب الى $f(x)$ ، أي أنّه: $\forall x \in D_0 : \{f_n(x)\} \to f(x)$

في الحالة الاخيرة، يكون الاقتران f نهاية المتتالية $\{f_n\}$ على D_0 ، وإذا كان الاقتران f موجوداً تسمى المتتالية $\{f_n\}$ متقاربة نقطياً على D_0 .

هناك الكثير من الرموز التي تستخدم للدلالة على التقارب النقطي مثل:

$f_n \to f$ ، $f(x) = \lim\{f_n(x)\}$ ، $\forall x \in D_0 : \{f_n(x)\} \to f(x)$

وبعضهم استخدم: $f(x) = \lim\limits_{p.w} f_n(x)$.

حسب تعريف النهايات ونظريات المتتاليات، نعلم أنه اذا كانت $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً الى f عند x_0 فان: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: N \le n, |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

<u>مثال 1-1:</u>

افرض ان: $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}, f(x) = x, x \in [0,1]$ برهن أن $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

<u>الحل:</u>

نفرض أن $\varepsilon > 0$ ، $x_0 \in [0,1]$ ، نبحث عن N بحيث أن:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left|\frac{{x_0}^2 + nx_0}{n} - x_0\right| = \frac{{x_0}^2}{n} < \varepsilon$$

أي أن $n > \dfrac{{x_0}^2}{\varepsilon}$ ، فاذا فرضنا $N = \dfrac{{x_0}^2}{\varepsilon}$ ، ينتج أن $f_n(x) \to f(x)$.

<u>مثال 1-2:</u>

افرض ان: $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}, f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ برهن أن $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$.

<u>الحل:</u>

نفرض أن $\varepsilon > 0$ ، $x_0 \in \mathbb{R}$ ، نبحث عن N بحيث أن:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad : |\sin\theta| \le 1$$

أي أن $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ، فإذا فرضنا $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ ، ينتج أن $f_n(x) \to f(x)$.

لاحظ أن قيمة N في المثال 1-1 تعتمد على كلٍّ من x_0, ε ، بينما قيمة N في المثال 1-2 تعتمد على قيمة ε فقط، أي أنها لا تعتمد على قيمة x_0 ، هذا النوع من التقارب هام جداً وهو يختلف عن النوع السابق - التقارب النقطي - ويسمى التقارب المنتظم .

تعريف:

التقارب المنتظم $(Uniform\ \ Convergence)$: اذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية اقترانية حيث أن $f_n : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ ، نقول عن $\{f_n(x)\}$ أنها متقاربة بانتظام على D إذا كان: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: N \le n, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in D$

ويرمز للتقارب المنتظم عادةً: $f_n \rightrightarrows f$ ، لكنني سأستخدم الرمز $f_n \Rightarrow f$ لأسباب طباعية.

في التقارب المنتظم نفس الـ N تعمل لجميع قيم x

[الاختلاف الوحيد بين التقارب النقطي والتقارب المنتظم هو أن العدد N في الاخير يجب أن يكون مستقلاً عن x على عكس N في التقارب النقطي التي تعتمد على قيمة x .]

ملاحظة:

التقارب المنتظم يقتضي ضمناً التقارب النقطي، واذا كانت لدينا متتالية اقترانات فإن المقترح الوحيد لقيمة التقارب المنتظم، هو قيمة التقارب النقطي .

مثال 1-3:

افرض أن: $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}, f(x) = x : x \in \mathbb{R}$ ،برهن أن $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

الحل:

نفرض أن $\varepsilon > 0$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ ، نبحث عن N بحيث أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : N \le n, |f_n(x) - f(x)| = \left| x + \frac{1}{n} - x \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

أي أن $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ، لتكن $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ ، بما أن N لا تعتمد على x ، فإن $f_n(x)$ تتقارب بانتظام الى $f(x)$.

إن نفي التعريف السابق يعطينا طريقة لبرهان ما اذا كانت متتالية اقترانات تتقارب بانتظام ام لا، ويكون كما يأتي : اذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية اقترانية حيث أن

، $f_n : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ نقول عن $\{f_n(x)\}$ أنها لا تتقارب بانتظام على D إذا كان:

$\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: N \le n, |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon$

مثال 1-4:

أثبت باستخدام التعريف ان المتتالية الاقترانية $\left\{\frac{1}{nx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب نقطياً، ولا تتقارب بانتظام الى $f(x) = 0$ لكل $x \in D \subseteq \mathbb{R} : 0 < |x| < 1$.

الحل:

نفرض أن $\varepsilon > 0$ ، $x_0 \in D$ ، نبحث عن N بحيث أن:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{nx_0} - 0\right| = \frac{1}{n|x_0|} < \varepsilon$$

أي أن $n > \frac{1}{\varepsilon |x_0|}$ ، فاذا فرضنا $N = \frac{1}{\varepsilon |x_0|}$ ، ينتج أن $f_n(x) \to f(x)$.

أما الآن فليكن $\varepsilon = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{n+1}$ ، يصبح لدينا:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{nx_0} - 0\right| = \left|\frac{1}{n\left(\frac{1}{n+1}\right)}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1 + \frac{1}{n} > \varepsilon$$ ، أي أنَّ

$\left\{\frac{1}{nx}\right\}_{n=1}^{\infty}$ لا تتقارب بانتظام على D ، وهو المطلوب.

إن التحقق من كون أن متتالية اقترانات تتقارب تقارباً منتظماً باستخدام التعريف ليس سهلاً خصوصاً عندما تكون الاقترانات معقدة، لكن هنالك معايير يمكن استخدامها لاثبات ان متتالية اقترانية ما متقاربة بانتظام ام لا، دون الحاجة لاستخدام التعريف، سأوردها في البند التالي، لكن لنعلم انه اذا كان الاقتران $f : D \to \mathbb{R}$ فإن:

مقياس الاقتران f هو $\|f\| = Sup\{|f(x)| : x \in D\}$

| إضاءة:

* الرمز Sup مختصر لكلمة $Supremum$ وهو **أصغر حدّ أعلى** للمجموعة التي نحن في صدد دراستها، وهو يكون أصغر من أي حدّ أعلى آخر للمجموعة نفسها.

* الرمز Inf مختصر لكلمة $Infimum$ وهو **أكبر حدّ أدنى** للمجموعة، وهو يكون أكبر من أي حدّ أدنى آخر للمجموعة نفسها.

(1 3) معايير التقارب المنتظم

المعيار الاول:

معيار كوشي (Cauchy Criterion):

المتتالية الاقترانية $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على المجموعة D إذا وفقط إذا كان:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in D$.

| البرهان:

<u>الاتجاه الأول</u>$\leftarrow$: إذا كانت $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام فإن $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

افترض أن $f_n \Rightarrow f$ على D، أي أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: N \leq n, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in D$$

ينتج أنَّ: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

أي أن $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

الاتجاه الثاني ← : إذا كان $\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$ فإن $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام

بما أن $\left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$ فإن $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشية، إذاً فهي متقاربة، أي

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ وبتعويض $f(x)$ مكان $f_m(x)$ حيث $m \to \infty$

ينتج أنَّ: $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \forall n \geq \mathbb{N}, x \in D$ ، أي أنَّ: $f_n \Rightarrow f$.

| نظرية:

المتتالية الاقترانية $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على المجموعة D إذا وفقط إذا كانت المتتالية $\{f_n\}$ متتالية كوشية.

المعيار الثاني:

مقياس الانتظام (*The Uniform Norm*):

اذا كانت المتتالية الاقترانية $\{f_n\}$ تتقارب نقطياً على المجموعة D الى $f(x)$ ، فإن:

المتتالية الاقترانية $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام على المجموعة D إذا وفقط إذا كان: $\| f_n - f \| = \sup\{\left| f_n(x) - f(x) \right| : x \in D\}$: $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$.

| البرهان:

الاتجاه الأول ← : إذا كانت $\{f_n\}$ تتقارب بانتظام فإن $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$

افترض أن $f_n \Rightarrow f$ على D ، أي أن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : N \leq n, \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \forall x \in D$$

أي أن ε حد أعلى للمجموعة $\{\left| f_n(x) - f(x) \right| : x \in D\}$ وهذا يعني:

$$\| f_n - f \| = \sup\{ | f_n(x) - f(x) | : x \in D \} \le \varepsilon$$

وهذا باستخدام تعريف النهايات يكافئ: $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$.

<u>الاتجاه الثاني</u>$\rightarrow$: إذا كان $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$ فإن $\{ f_n \}$ تتقارب بانتظام

بما أن $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$ ، فإنه: $\forall n > N, \| f_n - f \| < \varepsilon$

أي: $\| f_n - f \| = \sup\{ | f_n(x) - f(x) | : x \in D \} < \varepsilon$

وبالاستفادة من خصائص sup : $\forall x \in D, | f_n(x) - f(x) | \le \| f_n - f \| < \varepsilon$

وهذا يفيد : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N, \rightarrow | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon, \forall x \in D$

أي أن: $\{ f_n \}$ تتقارب بانتظام.

<u>مثال 1-5:</u>

ادرس التقارب بانتظام للمتتالية الاقترانية $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, 0 \le x \le 1$.

<u>الحل:</u>

عند ايجاد $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} (x_0{}^n - x_0{}^{n+1}) = 0$ نلاحظ أن المتتالية تتقارب نقطياً نحو $f(x) = 0$ ، ولدراسة التقارب بانتظام نفرض أن :

$g_n(x) = | f_n(x) - f(x) | = | x^n - x^{n+1} |$ ، لايجاد القيمة العظمى للاقتران $g_n(x)$ نقوم باشتقاقه بالنسبة الى x ، ونساوي المشتقة بالصفر .

$$g'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = (x^{n-1})(n - (n+1)x) = 0$$

$$x = 0, x = \frac{n}{n+1}$$

بما أنَّ $g''(\frac{n}{n+1}) < 0$ فإن للاقتران $g_n(x)$ قيمة عظمى عند النقطة $x = \frac{n}{n+1}$

أي: $\sup\{ g_n(x) \} = g_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n . \left(\frac{1}{n+1} \right)$ ، بأخذ النهاية له يكون :

$\lim\limits_{n\to\infty} Sup\left\{g_n(x)\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)\right] = 0$ ، وبهذا حسب المعيار الثاني فإن التقارب هنا منتظماً.

مثال 1-6:

ادرس التقارب بانتظام للمتتالية الاقترانية $f_n(x) = x^n - x^{2n}, 0 \le x \le 1$.

الحل:

عند ايجاد $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_0{}^n - x_0{}^{2n}) = 0$ نلاحظ أن المتتالية تتقارب نقطياً نحو $f(x) = 0$ ، ولدراسة التقارب بانتظام نفرض أن :

$g_n(x) = \left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| x^n - x^{2n} \right|$ ، لايجاد القيمة العظمى للاقتران $g_n(x)$ نقوم باشتقاقه بالنسبة الى x ، ونساوي المشتقة بالصفر .

$$g'_n(x) = nx^{n-1} - (2n)x^{2n-1} = nx^{n-1}(1-2x^n) = 0$$

$$x = 0, x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

بما أنَّ $g''(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) < 0$ فإن للاقتران $g_n(x)$ قيمة عظمى عند النقطة $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ أي:

$\sup\left\{g_n(x)\right\} = g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ، بأخذ النهاية له يكون : $\lim\limits_{n\to\infty} Sup\left\{g_n(x)\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} \ne 0$ ، وبهذا حسب المعيار الثاني فإن التقارب هنا ليس منتظماً.

ملاحظة:

يتميز معيار كوشي عن كل من مقياس الانتظام والتعريف لاثبات التقارب المنتظم، بأنه يثبت أن متتالية اقترانية ما مثل $\{f_n(x)\}$ متقاربة تقاربة منتظماً، دون الحاجة لايجاد قيمة $f(x)$.

(1 4) خصائص التقارب المنتظم

ليكن لدينا $\{f_n(x)\}$ متتالية اقترانات، $f(x)$ اقتران، وكانت $D=[a,b]$ هي المجال المعرّف عليه كل هذه الاقترانات، وكانت $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$، فإنَّ:

(1)

بما أنَّ: $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ فإن المتتالية $\{f_n(x)\}$ تتقارب نقطياً الى $f(x)$: $\{f_n(x)\} \to f(x)$.

البرهان:

بما أنَّ $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ فإن $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: N \le n, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in D$

نريد اثبات أنَّ: $|f_n(x_0) - f(x_0)| \le \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$، وهذا كما يلي:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \le |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

أي أن التقارب المنتظم يضمن التقارب النقطي.

(2)

إذا كان $f_n(x)$ متصلاً على D لكل $n \in \mathbb{N}$: $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$ فإن الاقتران $f(x)$ اقتراناً متصلاً على D.

| البرهان:

لتكن $x_0 \in D$ ، ولأن $f_n(x)$ متصلاً فإنه:

$|x-x_0|<\delta \mapsto \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: \forall x \in D, |f_n(x)-f_n(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ ، والتقارب المنتظم يضمن: $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}: N \le n, |f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}, \forall x \in D$

نريد اثبات أنَّ: $|x-x_0|<\delta \mapsto \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: \forall x \in D, |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

(3)

إذا كان $f_n(x)$ قابلاً للتكامل على $D=[a,b]$ لكل $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x): n \in \mathbb{N}$

فإن $f(x)$ كذلك أيضاً، أي أنَّ: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

| البرهان:

بما أنَّ $f_n(x)$ قابل للتكامل على $D=[a,b]$ ، إذاً هو متصل عليها وهو محدودٌ عليها أيضاً ، لتكن

$$\varepsilon>0, N \in \mathbb{N}: n \ge N, |f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \forall x \in D$$

و لتكن $M=\sup\{f_n(x)-f(x)\}=\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ باستخدام تعريف المجاميع العليا والدنيا فإنّ: $U(f-f_n,p) \le \dfrac{\varepsilon}{3}, L(f-f_n,p) \ge \dfrac{-\varepsilon}{3}$ (حسب مقرر تحليل حقيقي 5366، جامعة القدس المفتوحة، ص272)

كما أنَّ $U(f_n,p)-L(f_n,p)<\varepsilon$ ، وهذا ينتج من أنَّ $f_n(x)$ قابلاً للتكامل لأي تجزئة p على المجموعة $D=[a,b]$.

نريد أن نثبت أنَّ : $U(f,p)-L(f,p)<\varepsilon$ وهكذا يكون كما يأتي :

$$U(f,p)-L(f,p)\le U(f-f_n,p)+U(f_n,p)-L(f_n,p)-L(f-f_n,p)$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

وبهذا يكون الاقتران $f(x)$ قابلاً للتكامل على $D=[a,b]$ ، وبما انَّ كل من $f_n(x)$ ، $f(x)$ قابلان للتكامل فإنَّ:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx<\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx=\varepsilon$$

وهذا يعني أنَّ: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ (حسب مقرر تحليل حقيقي 5366، جامعة القدس المفتوحة، ص304)

هذا ويوجد خصائص أخرى كثيرة للتقارب المنتظم، لكنني سأكتفي بذكر الخصائص السابقة التي أوردتها، ولمن يريد الابحار أكثر في هذا الموضوع، فليراجع الكتب الموجودة في قائمة المراجع ليتعمّق أكثر.

متسلسلات الاقترانات

الفصل الثاني

(2)

الفهرس:

(1-2) المتسلسلات الاقترانية

Series of Functions

كما كنّا قد بينا تعريف المتتاليات العددية قبل البدء بالتعرف على المتتاليات الاقترانية، كان لزاماً أن نقوم بأمرٍ مماثل عند التعامل مع المتسلسلات.

تعريف:

إذا كانت $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية عددية حيث أن $\{a_n\}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$، فإنه يوجد لدينا متتالية مرتبطة من المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث تكون $s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ، فإن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تسمى **متسلسلة** (*series*)، وهي تتضمن أن: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3...$.

أما في ما يختص بتقارب المتسلسلات العددية، فإنه اذا كان المجموع $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ موجوداً، وكان عدداً حقيقياً واحداً، فإن المتسلسلة متقاربة إليه، أما اذا كان المجموع ي ساوي ∞، فإن

المتسلسلة تكون تباعدية – أي ليست متقاربة -.

انَّ الشرط اللازم والكافي لتقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن تكون متتالية المجاميع الجزئية لها $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$، متقاربة.

أمثلة على المترلسلات العددية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^0}-\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\dots$$

في المتسلسلات العددية، كان ما يسبب الاختلاف في قيمة حدود المتسلسة هو قيمة العدّاد n فقط، لكن عندما يكون في الحدود متغير آخر كـ x مثلاً يختلف الأمر، لأن حدود المتسلسلة حينها تتحول الى اقترانات بدلاً من ان تكون اعداداً حقيقية كما هو الحال في العددية.

| تعريف:

إذا كانت $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية اقترانية ، $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ ، فإنه يوجد لدينا متتالية مرتبطة من المجاميع الجزئية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (Partial Sums) بحيث تكون $\{s_n\}=\sum_{k=1}^{n} f_k$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

تسمى **متسلسلة اقترانات** (Series of Functions)، وهي تتضمن أن:

$$.\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1+f_2+f_3+\dots$$

لاحظ أنه $\forall x \in D$ ينتج متسلسلة جديدة، فإنَّ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تمثل متسلسلات اقترانية عديدة تبعاً لقيمة المتغير المستقل x ، و المتسلسلات الناتجة تكون متسلسلات عددية ، هذا لأننا تخلينا عن رمز x بقيمته الحقيقية.

أما في ما يختص بتقاربها سواء النقطي أو المنتظم فإنَّ المتسلسلة الاقترانية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ تتقارب إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n\} = \sum_{k=1}^{n} f_k$ متقاربة، أي اذا تقاربت $\{s_n\} = \sum_{k=1}^{n} f_k$ نقطياً فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ تتقارب نقطياً، واذا تقاربت $\{s_n\} = \sum_{k=1}^{n} f_k$ بانتظام فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ تتقارب بانتظام على نفس المجال.

<u>أمثلة على المتسلسلات الاقترانية:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 4x}{4^3} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

يقال عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ أنها **متقاربة بالاطلاق** (*Absolutely Convergent*) على المجموعة D إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ متقاربة لكل $\forall x \in D$.

<u>شرط كوشي لتقارب المتسلسلات الاقترانية:</u>

إنَّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تتقارب بانتظام على $D \subseteq \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m > N, \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon, \forall x \in D$$

(2-2) اختبارات المتسلسلات الاقترانية

إنَّ الاختلاف بين المتتاليات والمتتاليات الاقترانية من جهة، والمتسلسلات والمتسلسلات الاقترانية من جهة أخرى، أدى الى ظهور اختبارات تختص بها المتسلسلات الاقترانية عن المتتاليات الاقترانية فيما يتعلق بالتقارب المنتظم.

__الاختبار الاول:__

اختبار فيرشتراس للتقارب المنتظم $(Weierstrass\ Test)$ **:**

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية من الاقترانات المعرفة على $D \subseteq \mathbb{R}$، و $\{a_n\}$ متتالية من الاعداد الحقيقية الموجبة، فإذا كان $|f_n(x)| \le a_n, \forall x \in D$ وكانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة تقارباً منتظماً وبالاطلاق على D.(القوصي، المتتاليات والمتسلسلات العددية والتابعية، ص84)

بعض الكتب تطلق على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ السابقة اسم **المتسلسلة القرونة**، وهي تكون قرونة (مقرونة) بالمتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.(القوصي، المتتاليات والمتسلسلات العددية والتابعية)

البرهان:

بما أنَّ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، إذاً هي تحقق شرط كوشي بحيث:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m > N : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$ والان بما أنه $|f_n(x)| \le a_n, \forall x \in D$ فإنَّ $\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$ أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تحقق شرط كوشي فهي اذا متقاربة بانتظام، وبما أنَّ $\sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| < \varepsilon$ أي أنها أيضاً تحقق شرط كوشي، فهذا يعني أيضاً أنَّ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بالاطلاق.

ملاحظة:

إن شرط فيرشتراس هو شرط كافٍ وغير لازم لوجود التقارب بانتظام وبالإطلاق، حيث يمكن أن نجد متسلسلة متقاربة بانتظام وبالإطلاق دون أن تكون قرونة.

مثال 2-1:

ادرس تقارب المتسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^2}}$.

الحل:

بملاحظة أنَّ $: |\sin u| \le 1, x^2 \ge 0 :$ $\left| \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^2}} \right| \le \left| \frac{1}{\sqrt{n^4 + x^2}} \right| \le \frac{1}{n^2}$،

فلتكن: $\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وهي متسلسلة عددية تتقارب الى 0، بذلك فإن المتسلسة المعطاة تحقق شروط فيرشتراس وهي إذاً متقاربة بانتظام وبالإطلاق.

| إضاءة:

إذا كانت $\{a_n\},\{b_n\}$ متتاليتان من الأعداد الحقيقية، وكانت $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ فإن:

$$n > m, \sum_{k=m}^{n} a_k b_k = (a_{n+1}S_n - a_m S_{m-1}) + \sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k$$

الاختبار الثاني:

اختبار ديريشليت للتقارب المنتظم (Dirichlet Test) **:**

لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الاقترانات المعرفة على $D \subseteq \mathbb{R}$ بحيث أن متتالية المجاميع الجزئية النونية $\{S_n\}$ محدودة على D. فإذا كانت $\{g_n\}$ متتالية من الاقترانات المتناقصة المعرفة على D متقاربة تقارباً منتظماً للاقتران $\lim g(x) = 0, \forall x \in D$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ تكون متقاربة بانتظام على D.(كتكت، مبادئ التحليل الحقيقي، ص257)

| البرهان:

بما أن $\{S_n\}$ متتالية محدودة فإنه يوجد $0 < M$ بحيث أنَّ: $|S_n(x)| \le M, \forall x \in D$، وباستخدام **الإضاءة** السابقة فإن:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k g_k\right| \le \left|(g_{n+1}S_n - g_m S_{m-1}) + \sum_{k=m}^{n}(g_k - g_{k+1})S_k\right| \le M\left(|g_{n+1}| + |g_m| + \sum_{k=m}^{n}|g_k - g_{k+1}|\right)$$

وبما أن المتتالية $\{g_n\}$ متناقصة و $g_x \Rightarrow 0$ فإنه: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : N < m < n$ بحيث

أنّ: $\left|g_{n+1}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}, \left|g_m(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}, \sum_{k=m}^{n}\left|g_k(x) - g_{k+1}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}, \forall x \in D$ وبالتالي:

$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k g_k(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in D$، أي أن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ تحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم، إذاً فهي تتقارب بانتظام على D.

| ملاحظة:

يستخدم الرمز $\{g_n\} \downarrow 0$ للدلالة على أن $\{g_n\}$ متتالية من الاقترانات المتناقصة التي تتقارب إلى 0.

مثال 2-2:

ادرس تقارب المتسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, x \in [a,b] \subset (0, 2\pi)$.

الحل:

لو حاولنا تطبيق اختبار فيرشتراس نجد أن $\frac{\sin nx}{n} \le \frac{1}{n}$، لكن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ليست تقاربية وبهذا يفشل اختبار فيرشتراس، لذلك نستخدم اختبار ديريشلت:

نفرض أن : $f_n(x) = \sin nx, g_n(x) = \frac{1}{n}$ و $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ وأيضاً :

$\{S_n(x)\} = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ متتالية المجاميع الجزئية محدودة على $[a,b]$

فإن المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ متقاربة تقارباً منتظماً على $[a,b]$ حسب اختبار ديريشلت.

الاختبار الثالث:

اختبار أبل للتقارب المنتظم $(Able\ Test)$ **:**

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متسلسلة متقاربة تقارباً منتظماً على $D \subseteq \mathbb{R}$، وكانت $\{g_n\}$ متتالية مطردة (وتيرية) ومحدودة من الاقترانات المعرفة على D، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ تكون متقاربة بانتظام على D.(كتكت، مبادئ التحليل الحقيقي، ص258)

| إضاءة:

المتتالية الوتيرية تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة: نظرية. (مقرر تحليل حقيقي 5366، جامعة القدس المفتوحة، ص94)

| البرهان:

بما أن $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة تقارباً منتظماً على D فإن متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة بانتظام على D، أي أنَّه:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : n > N, \left|S(x) - S_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4K}, \forall x \in D : K > 0$$

وكذلك أيضاً: $\exists K > 0, \left|S_n(x)\right| \le K, \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}$

وبما أنَّ $\{g_n\}$محدودة فإن: $\exists K > 0 : \left|g_n(x)\right| < K, \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}$، ولأنها وتيرية فهي متقاربة، أي: $\left|g_{n+1}(x) - g_m(x)\right| \le \sum_{k=m}^{n} \left|g_{k+1}(x) - g_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4K} : K > 0, \forall x \in D$

وبهذا فإنَّ:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=m}^{n} f_k g_k(x)\right| \le \left|g_{n+1}(x)S_n(x) - g_m(x)S_{m-1}(x)\right| + \left|\sum_{k=m}^{n}\left((g_k(x) - g_{k+1}(x))S_k(x)\right)\right| \\
&< \left|g_{n+1}(x)\right|\left|S_n(x) - S(x)\right| + \left|g_{n+1}(x) - g_m(x)\right|\left|S(x)\right| + \left|g_m(x)\right|\left|S(x) - S_{m-1}(x)\right| \\
&+ \left|\sum_{k=m}^{n}\left((g_k(x) - g_{k+1}(x))S_k(x)\right)\right| < K\frac{\varepsilon}{4K} + K\frac{\varepsilon}{4K} + K\frac{\varepsilon}{4K} + K\frac{\varepsilon}{4K} < \varepsilon
\end{aligned}$$

أي أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ تتقارب بانتظام.

ملاحظات:

1. اختباري أبل وديريشلت يختصان بالمتسلسلات الاقترانية التي يمكن كتابة حدها العام بالشكل: $F_n(x) = f_n(x) * g_n(x)$.
2. يمكن تطبيق اختباري أبل وديريشلت على المتسلسلات العددية كحالة خاصة منها.
3. الشروط الواردة في كل الاختبارات السابقة، هي شروط كافية وغير لازمة.
4. اختبار فيرشتراس يربط المتسلسلة الاقترانية بمتسلسلة عددية موجبة، وبهذا يمكننا استخدام المعايير الخاصة بالمتسلسلات العددية الموجبة في دراسة المتسلسلات الاقترانية.

الخاتمة

علم الرياضيات جلّه علمٌ ممتع، يفتح الآفاق الواسعة للذهن، من تخيل وتحليل ومنطق، وهذا البحث مثالٌ على ذلك.

بعد دراستي لهذا الموضوع، والاطلاع على الكثير من الكتب والمراجع التي تناولَتْه، وقيامي بكتابة هذا البحث، أقول: إنّ هذا الجانب من الرياضيات، أي المتتاليات والمتسلسلات الاقترانية، لا يكفي مناقشته وبحثه في مشروع كهذا فقط، فأنا وإن كنت حاولت التوسّع كثيراً في

موضوع المتتاليات والمتسلسلات الاقترانية، إلا أنها بحر واسع لا ينضب، فيه من الجزئيات والأبواب الكثيرة التي لم أتطرق إليها، و ابتعدتُ عنها لضيق الوقت.

مع ذلك ، أرجو أن يكون بحثي قد تناول الموضوع بشكلٍ جيّد، ولربما أتناول الموضوع نفسه لاحقاً بشكلٍ أوسع، إن يسّر لي ربي هذا.

المراجع والمصادر

1. د.صالح ، مُحَمَّد ، و د.التخمان ، خالد ، وآخرون ، (2006)، **الرياضيات للصف الأول الثانوي(العلمي والصناعي) ج2** ، ط1 ، رام الله: مركز المناهج الفلسطينية.
2. د.حكواتي ، عبدالله ،و د.هلسة ، محمود ،(2010)، مقرر **تحليل حقيقي** ، ط1 ، عمان: جامعة القدس المفتوحة.
3. كتكت ، محمود مُحَمَّد ، (2010)، **مبادئ التحليل الحقيقي** ، عمان: عمادالدين للنشر والتوزيع.
4. القوصي ، مُحَمَّد مفيد ، (2010)، **المتتاليات والمتسلسلات العددية والتابعية** ،ط1 ، عمان: مركز الكتاب الأكاديمي.
5. Bartle, R. G., & Sherbert, D. R., (2000), **Introduction to Real Analysis**, 3rd E, USA: John Wiley & Sons, Inc.
6. Wade, W. R., (2003), **An Introduction to Analysis**, 3rd E, Richmond, TX, U.S.A.

7. Silvia, Evelyn, (1999), **Advanced Calculus**, University of California, Davis, CA, USA.
8. Adams, Malcolm R., (2007), Sequences and Series: **An Introduction to Mathematical Analysis**.

المصادر الإلكترونية:

1. www.math.ucdavis.edu
2. www.math.uga.edu

تم بحمد الله