# الوحدة الاولى

## الاعداد والعمليات عليها

## البنود

## ١-١ الى ١-٤

# ملخص لأهم قوانين الوحدة الأولى

١- $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$ ، $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$ ، $ب \neq ٠$ (أ، ب عددان حقيقيان)

- الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| حيث ل ∈ ح+ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س| ، ل وحدة لليسار.

- الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| حيث ل ∈ ح+ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س| ، ل وحدة لليمين.

- الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| − ك هو انسحاب أفقي ورأسي معاً للدالة ص = |س| (ل وحدة لليسار، و ك وحدة لأسفل)

- يكون مستقيمان رأسيان متوازيان اذا كان لهما الميل نفسه.

- يكون مستقيمان متعامدان اذا كان ناتج ضرب ميلهما يساوي −١.

- المميز : Δ = ب² − ٤ أ جـ

- حل المعادلة أ س² + ب س + جـ = ٠ هو $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

- اذا كان : م ، ن جذري المعادلة التربيعية فإن :

م + ن = $\frac{-ب}{أ}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$ ونكتب المعادلة على الصورة :

س² − (م + ن) س + م × ن = ٠

# حـــل أســئلة (كتـــاب الطالـــب)

ص ١٣

مثال (١)

حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًا وأيها عددًا غير نسبي.

أ $-\frac{١٨}{٥}$ ب $\sqrt{٤١}$

جـ $٠,٣٣٣...$ د $١,٠١٠٠١٠٠٠١...$

الحل:

أ $-\frac{١٨}{٥}$ هو عدد نسبي – عدد حقيقي.

ب $\sqrt{٤١}$ هو عدد غير نسبي – عدد حقيقي.

جـ $٠,٣٣٣... = ٠,\overline{٣} = \frac{١}{٣}$ هو عدد نسبي – عدد حقيقي.

د $١,٠١٠٠١٠٠٠١...$ هو عدد غير نسبي – عدد حقيقي.

حاول أن تحل ص ١٣

(١) حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًا وأيها عددًا غير نسبي: $\sqrt{\frac{٤}{٣}}$ ، $١,\overline{٤}$ ، $٥ \times \pi$.

عدد غير نسبي - حقيقي

عدد نسبي - حقيقي

عدد نسبي حقيقي

ص ١٥

لتكن أ، ب، جـ أعداد حقيقية.

| الخاصية | القاعدة | ملاحظة |
|---|---|---|
| التعدي | إذا كان أ ≥ ب، ب ≥ جـ فإن أ ≥ جـ | |
| الجمع | إذا كان أ ≥ ب، فإن أ + جـ ≥ ب + جـ | |
| الطرح | إذا كان أ ≥ ب، فإن أ - جـ ≥ ب - جـ | |
| الضرب | إذا كان أ ≥ ب، جـ > ٠، فإن أجـ ≥ ب جـ | |
| | إذا كان أ ≥ ب، جـ < ٠، فإن أجـ ≤ ب جـ | لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا. |
| القسمة | إذا كان أ ≥ ب، جـ > ٠، فإن $\frac{أ}{جـ} \geq \frac{ب}{جـ}$ | |
| | إذا كان أ ≥ ب، جـ < ٠، فإن $\frac{أ}{جـ} \leq \frac{ب}{جـ}$ | لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا. |

## ٤ - خاصية الكثافة Density Property

يتسع وعاء لعدد محدد من الحجارة (تبقى فراغات كبيرة). كما أنّه يتسع لعدد أكبر من الحصى الصغيرة (تقل الفراغات) ويمكن ملؤه كذلك بعدد أكبر بكثير من الرمل (تصبح الفراغات نادرة).

وماذا إذا مُلئ الوعاء بأجسام أصغر حجمًا من الرمل؟

كلما صغر حجم الأجسام المستخدمة لملء الوعاء زادت الكثافة.

يمكن تشبيه سعة الوعاء بطول فترة على خط الأعداد.

> **معلومة مفيدة:**
> تعتمد كثافة الجسم على شدة تراص جزيئات المادة فيه.

**يوجد بين أي نقطتين مختلفتين على خط الأعداد عدد لا نهائي من النقاط، وبالتالي بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية.**

**مثال (٢)**

أعط خمسة أعداد حقيقية بين ٣,١٤ ، ٣,١٥.

الحل: تعلم أن ٣,١٤ = ٣,١٤٠ ، ٣,١٥ = ٣,١٥٠

∴ الأعداد الحقيقية مثل: ٣,١٤١ ، ٣,١٤٢ ، ٣,١٤٥٦ ، ٣,١٤٤٤٨ ، π.

**حاول أن تحل**

٢) أعط ستة أعداد حقيقية بين ١,٤١٤ ، ١,٤١٥. الحل: ١,٤١٤١ ، ١,٤١٤٢ ، ١,٤١٤٣ ، ١,٤١٤٤ ، ١,٤١٤٥ ، ١,٤١٤٦

## ٥ - الفترات ntervals

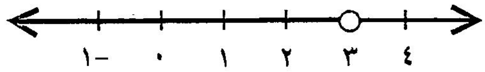
الفترة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

لاحظ أن ليس كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل فترة. لماذا؟

يمكن استخدام المتباينات للتعبير عن الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية، وكذلك يمكن تمثيل الفترات على خط الأعدا

مثلًا: يعبّر عن الفترة: (−∞، ٣) بالمتباينة، س < ٣.

وهي مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٣، وتمثّل بيانيًا كما يلي:




سوف نميز بين نوعين من الفترات: **الفترات المحدودة والفترات غير المحدودة.**

### أولًا: الفترات المحدودة

الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لتكن أ، ب أعدادًا حقيقية.

| رمز الفترة | نوع الفترة | رمز المتباينة | التمثيل البياني |
|---|---|---|---|
| [أ، ب] | مغلقة | أ ≤ س ≤ ب |  |
| (أ، ب) | مفتوحة | أ < س < ب |  |
| [أ، ب) | نصف مفتوحة أو نصف مغلقة | أ ≤ س < ب |  |
| (أ، ب] | نصف مفتوحة أو نصف مغلقة | أ < س ≤ ب |  |
| الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة. | | | |

## ثانيا: الفترات غير المحدودة صـ٧

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: ليكن أ، ب ∈ ح.

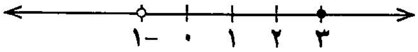
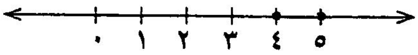
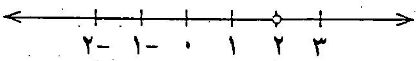
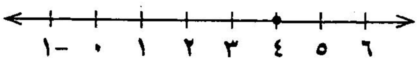
| التمثيل البياني | رمز المتباينة | نوع الفترة | رمز الفترة |
|---|---|---|---|
| أ | س ⩾ أ | نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى | [أ، ∞) |
| أ | س > أ | مفتوحة وغير محدودة | (أ، ∞) |
| ب | س ⩽ ب | نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل | (-∞، ب] |
| ب | س < ب | مفتوحة وغير محدودة من الأسفل | (-∞، ب) |

### مثال (٣)

اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (-١، ٣] ب [٤، ٥] جـ (-∞، ٢) د [٤، +∞)

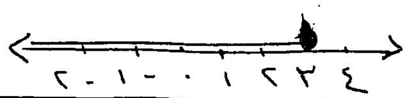
الحل:

| نوع الفترة | رمز المتباينة | التمثيل البياني |
|---|---|---|
| أ فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة) | -١ < س ≤ ٣ |  |
| ب فترة مغلقة | ٤ ≤ س ≤ ٥ |  |
| جـ فترة مفتوحة وغير محدودة من أسفل | س < ٢ |  |
| د فترة نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى | س ≥ ٤ |  |

**حاول أن تحل**

٣ اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

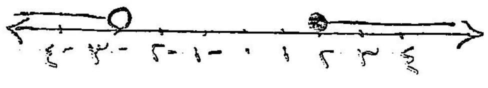
أ (-٢، ١) ب (-∞، ٣]

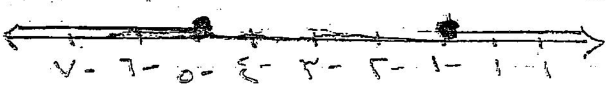
| ٣ | | نوع الفترة | رمز المتباينة | التمثيل البياني |
|---|---|---|---|---|
| أ) | (-٢، ١) | مفتوحة | -٢ < س < ١ |  |
| ب) | (-∞، ٣] | نصف مفتوحة | س ≤ ٣ |  |

٤ مثل كلًّا مما يلي على خط الأعداد:

١٠

أ [٢، ∞) ∪ (-∞، -٣) ب [-١، ∞) ∪ (-∞، -٥]



# تقدير الجذر التربيعي
# Estimating Square Root

ص٢١

معلم

سوف تتعلم
- تقدير الجذر التربيعي
- استخدام الجذر التربيعي في حل المسائل

دعنا نفكر ونتناقش

لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

| | |
|---|---|
| ٣ × ٣ = ٩ | الجذران التربيعيان للعدد ٩: ٣ الجذر الموجب |
| (–٣) × (–٣) = ٩ | –٣ الجذر السالب |

٣ هو الجذر الأساسي.

العدد ٢٩ , ٧ هو موجب إذًا له جذران تربيعيان. لكن نجد صعوبة في إيجاد هذين الجذرين.

يعتمد الرمز $\sqrt{\ }$ للإشارة إلى الجذر التربيعي الموجب فنكتب $\sqrt{٧ , ٢٩}$.

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على: $\sqrt{٧ , ٢٩} = ٧ , ٢$. كذلك $-\sqrt{٧ , ٢٩} = -٧ , ٢$.

**الجذر التربيعي** **Square Root**

**العدد ٲ هو جذر تربيعي للعدد ب عندما ٲ$^{٢}$ = ب**

## خصائص الجذور التربيعية Properties of Square Roots

خاصية الضرب: لأي عددين حقيقيّين غير سالبين ٲ، ب: $\sqrt{ٲب} = \sqrt{ٲ} \times \sqrt{ب}$

خاصية القسمة: لأي عددين حقيقيّين موجبين ٲ، ب: $\sqrt{\frac{ٲ}{ب}} = \frac{\sqrt{ٲ}}{\sqrt{ب}}$

**مثال (١)**

بسِّط كل تعبير.

أ $\sqrt{٤٩} = ٧$ جذر تربيعي موجب.

ب $-\sqrt{١٤٤} = -١٢$ جذر تربيعي سالب.

ج $\pm\sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \frac{\pm\sqrt{٩}}{\sqrt{٢٥}} = \pm\frac{٣}{٥}$ الجذران التربيعيان هما $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٥}$.

د $\sqrt{٠} = ٠$ للصفر جذر تربيعي واحد هو صفر.

هـ $\sqrt{-٣٦}$ غير معرّف في ح.

(في مجموعة الأعداد الحقيقية الجذر التربيعي لعدد سالب غير معرّف).

**حاول أن تحل**

١ بسِّط كل تعبير.

أ $\sqrt{٨١} = ٩$ ب $-\sqrt{١٦٩} = -١٣$ ج $\pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$ د $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \frac{٣}{٥}$

ص٤٤

بعض الجذور التربيعية هي أعداد نسبية، وبعضها الآخر أعداد غير نسبية.

فمثلًا من الجذور النسبية: $\sqrt{١٢١} = ١١$، $-\sqrt{١,٢١} = -١,١$، $\pm\sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = \pm\frac{٩}{١٠}$

من الجذور غير النسبية: $\sqrt{٥} \simeq ٢,٢٣٦$، $\sqrt{\frac{٣}{٧}} \simeq ٠,٦٥٤٧$

**مثال (٢)**

حدّد ما إذا كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أو غير نسبي.

**أ** $\sqrt{٦٤} = ٨$ عدد نسبي

**ب** باستخدام الآلة الحاسبة $-\sqrt{٤,٩} \simeq -٢,٢١٣٥٩٤٣...$ عدد غير نسبي

**ج** باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{\frac{١}{٧}} \simeq ٠,٣٧٧٩٦٤٤٧٣$ عدد غير نسبي

**مصطلح رياضي:**

في الصيغة العشرية:

العدد النسبي هو عدد منته أو متكرر (دوري).

العدد غير النسبي هو عدد غير منته دون تكرار.

**حاول أن تحل**

٢ حدّد ما إن كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أو غير نسبي.

**أ** $\sqrt{١٣} \simeq ٣,٦٠٥٥٥$ غير نسبي

**ب** $-\sqrt{٦٢٥} = -٢٥$ نسبي

**ج** $-\sqrt{١٠٠٠} \simeq -٣١,٦٢٢٨$ غير نسبي

**د** $\sqrt{\frac{٢}{١٥}} \simeq ٠,٣٦٥١٤٨$ غير نسبي

## ١ - تقدير الجذور التربيعية Estimating Square Roots

مربعات الأعداد الطبيعية تسمى مربعات كاملة Perfect Squares.

| العدد الطبيعي | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ | ١١ | ١٢ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المربع الكامل | ١ | ٤ | ٩ | ١٦ | ٢٥ | ٣٦ | ٤٩ | ٦٤ | ٨١ | ١٠٠ | ١٢١ | ١٤٤ |

يمكن استخدام المربعات الكاملة لتقدير قيمة بعض الجذور التربيعية دون استخدام الآلة الحاسبة.

ص ٢٣

## مثال (٣)

حدّد بين أي عددين طبيعيين (كليين) متتاليين يوجد $\sqrt{١٥,٤١}$، ثم قدّر قيمته.

**معلومة رياضية:**
لأي أعداد موجبة وجذورها التربيعية الموجبة الترتيب نفسه.

الحل:

$٩ < ١٥,٤١ < ١٦$ ‏ ١٥,٤١ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٩، ١٦.

$\sqrt{٩} < \sqrt{١٥,٤١} < \sqrt{١٦}$ ‏ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٣ < \sqrt{١٥,٤١} < ٤$ ‏ تبسيط

إذًا $\sqrt{١٥,٤١}$ هو بين ٣، ٤. وحيث إن العدد ١٥,٤١ أقرب إلى ١٦ فإن $\sqrt{١٥,٤١}$ يكون قريبًا من ٤ وهو يساوي تقريبًا ٣,٨ أو ٣,٩.

### حاول أن تحل

٣ حدّد بين أي عددين صحيحين يوجد العدد $-\sqrt{٣٠,٨}$، ثم قدّر قيمته. بين -٥ ، -٦ يساوي تقريبًا ٥

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للجذور التربيعية باستخدام الآلة الحاسبة:

## مثال (٤)

حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{٢٨,٦٣}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

الحل:

$٢٥ < ٢٨,٦٣ < ٣٦$ ‏ ٢٨,٦٣ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٢٥، ٣٦.

$\sqrt{٢٥} < \sqrt{٢٨,٦٣} < \sqrt{٣٦}$ ‏ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٥ < \sqrt{٢٨,٦٣} < ٦$ ‏ تبسيط

إذًا $\sqrt{٢٨,٦٣}$ هو بين ٥، ٦.

باستخدام الآلة الحاسبة: √ 28.63 = 5.350700889

أي أن $\sqrt{٢٨,٦٣}$ يساوي تقريبًا ٥,٤.

### حاول أن تحل

٤ حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{١٣,٧}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

بين ٣ ، ٤ يساوي تقريبًا ٣,٧

ص٢١

## مثال (٥) تطبيقات حياتية

يساعد تقدير الجذور التربيعية على إيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية. أوجد طول وتر مثلث، طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٥ سم، ٧ سم.

الحل:

$٥^٢ + ٧^٢ = ٢٥ + ٤٩ = ٧٤$ نظرية فيثاغورث

٧٤ يقع بين المربعين الكاملين المتتاليين ٦٤، ٨١.

∴ طول وتر المثلث هو بين ٨، ٩ سم.

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{٥^٢ + ٧^٢} \simeq ٨,٦٠٢٣$

طول وتر المثلث ≃ ٨,٦ سم.

**تذكر:**

في المثلث قائم الزاوية، مربع الوتر = مجموع مربعي طولي ضلعي الزاوية القائمة.

### حاول أن تحل

٥ أوجد طول وتر مثلث قائم الزاوية، طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٩ سم، ١٣ سم.

$٩^٢ + ١٣^٢ = ٨١ + ١٦٩ = ٢٥٠$

٢٥٠ بين المربعين الكاملين ٢٢٥ و ٢٥٦

الوتر بين ١٥ و ١٦ سم ، $\sqrt{٢٥٠} \simeq ١٥,٨$ سم.

## مثال (٦)

يسقط جسم من ارتفاع ٩ أمتار. تبين المعادلة ع = ٤,٩ $ن^٢$ العلاقة بين الارتفاع ع بالأمتار والزمن ن بالثواني المستغرق للوصول إلى سطح الأرض. ما الزمن اللازم ليصل إلى الأرض؟

الحل:

ع = ٤,٩ $ن^٢$

$ن^٢ = \frac{٩}{٤,٩}$

$ن = \sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ أو $ن = -\sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ مرفوضة

ن ≃ ١,٣٥٥ ثانية باستخدام الآلة الحاسبة

أي يلزم حوالى ثانية ونصف ليصل الجسم إلى الأرض.

### حاول أن تحل

٦ من مثال (٦)، ما الزمن اللازم لوصول جسم إلى الأرض إذا سقط عن ارتفاع ١٤ مترًا؟

ع = ٤,٩ $ن^٢$ ، $ن^٢ = \frac{١٤}{٤,٩}$ ، اما $ن = \sqrt{\frac{١٤}{٤,٩}}$ أو $ن = -\sqrt{\frac{١٤}{٤,٩}}$ مرفوضة

ن ≃ ١,٦٩ ثانية

## ١ - ٣ حل المتباينات

ص ٢٢

الخطوة ٢: تحقق من صحة علاقة الترتيب بالتعويض في المتباينة.

س - ٧ > -٢

٤ - ٧ > -٢ عوض بعدد أصغر من ٥ عن س

-٣ > -٢ ✓

كل من الخطوتين ١ ، ٢ تتحقق، لذلك س < ٥ هو حل المتباينةِ س - ٧ < -٢

**تذكر:**

الدائرة المفتوحة على تمثيل بياني، تعني أن العدد ليس متضمَّنًا في الحل.

الدائرة المغلقة على تمثيل بياني، تعني أن العدد متضمَّن في الحل.

### حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي:

أ ص - ٤ ≥ ١ ب ١٢ ≤ س - ٥

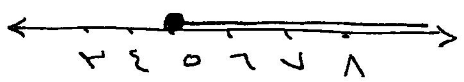
ص ٢٦ حاول أن تحل

١ أ- ص - ٤ ≥ ١

ص - ٤ + ٤ ≥ ١ + ٤

ص ≥ ٥

مجموعة الحل [٥ ، ∞)




ب ١٢ ≤ س - ٥

١٢ + ٥ ≤ س - ٥ + ٥

١٧ ≤ س

مجموعة الحل [١٧ ، ∞)


### حاول أن تحل

٢ تتسع القاعة الرئيسة في إحدى المدارس لـ ٣٠٠ مقعد. في عرض لإحدى المسرحيات كان عدد الحضور من الفصل العاشر ٨٩ طالبًا، فكم عدد الطلاب الذين يمكن حضورهم من بقية فصول المدرسة؟

عدد الطلاب من باقي الصفوف س

٨٩ + س ≤ ٣٠٠

٨٩ + س - ٨٩ ≤ ٣٠٠ - ٨٩

س ≤ ٢١١

استخدام خاصية المعكوس الضربي في حل المتباينات.

عندما تضرب طرفي متباينة في عدد سالب أو تقسم طرفي متباينة على عدد سالب، اعكس علاقة الترتيب.

ص ٢٧

## مثال (٣)

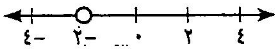
أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{س}{-٢} < ١$، ومثل الحلول بيانيًا على خط الأعداد.

الحل: $\frac{س}{-٢} < ١$

$-٢ \times \left(\frac{س}{-٢}\right) > ١ \times (-٢)$ اضرب كلًا من الطرفين في المحكوس الضربي (−٢) واعكس علاقة الترتيب

$س > -٢$ بسط

مثل بيانيًا



مجموعة الحل = (−٢، ∞)

**معلومة مفيدة:**

إذا كان أ < ب، جـ > ٠، فإن

أجـ < ب جـ، $\frac{أ}{جـ} < \frac{ب}{جـ}$.

إذا كان أ < ب، جـ < ٠، فإن

أجـ > ب جـ، $\frac{أ}{جـ} > \frac{ب}{جـ}$.

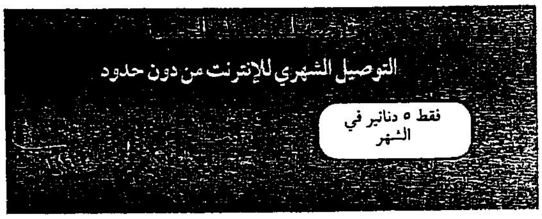
### حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{ب}{٤} \leq ١$، ومثل الحلول بيانيًا على خط الأعداد.

$٤ \times \frac{ب}{٤} \leqslant ١ \times ٤$ ب $\leqslant ٤$ مجموعة الحل [٤، ∞)

## مثال (٤)

عمل تجاري: تعلن شركة لتوصيل خدمات الإنترنت عن الفرصة التالية الموضحة. هدف الشركة هو تحقيق مبلغ إضافي على الأقل ٤٥٠٠ دينار شهريًا. كم مشتركًا جديدًا يلزم أن تجتذبهم الشركة؟




الحل:

الألفاظ: عدد المشتركين الجدد مضروبًا بـ ٥ دنانير يكون على الأقل ٤٥٠٠ دينار.

ليكن ن = عدد المشتركين الجدد

المتباينة $ن \times ٥ \geq ٤٥٠٠$

$٥ن \geq ٤٥٠٠$

$\frac{٥ن}{٥} \geq \frac{٤٥٠٠}{٥}$ اقسم طرفي المتباينة على ٥

$ن \geq ٩٠٠$ بسط

يلزم أن تجتذب ٩٠٠ مشترك جديد على الأقل.

التحقق من معقولية الإجابة: الإجابة معقولة لأن ٥ × ٩٠٠ هو ٤٥٠٠، وأي عدد أكبر من ٩٠٠ مضروبًا بـ ٥ ينتج عددًا أكبر من ٤٥٠٠.

### حاول أن تحل

٤ الحد الأقصى لحمولة مصعد في فندق ١٠٠٠ كجم. افرض أن متوسط وزن النزيل ٨٠ كجم، فكم نزيلًا يمكن للمصعد أن يحملهم بأمان؟

$٨٠ س \leqslant ١٠٠٠$ $س \leqslant ١٢٫٥$

$\frac{٨٠ س}{٨٠} \leqslant \frac{١٠٠٠}{٨٠}$ يمكن أن يحمل المصعد ١٢ نزيل على الأكثر

حاول أن تحل

(٥)

أ)

$٣(س + ٤) + ٥س \leq ٢$

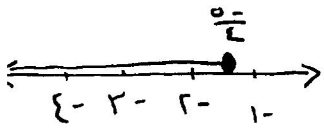
$٣س + ١٢ + ٥س \leq ٢$

$٨س + ١٢ \leq ٢$

$٨س + ١٢ - ١٢ \leq ٢ - ١٢$

$\frac{٨س}{٨} \leq \frac{-١٠}{٨}$

$س \leq -\frac{٥}{٤}$ مجموعة الحل $(-\infty ، -\frac{٥}{٤}]$




ب)

$-٣ \leq ١ - ٢س < ٣$

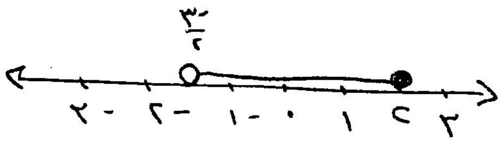
$-٣ - ١ \leq ١ - ١ - ٢س < ٣$

$-٤ \leq -٢س < ٣$

$\frac{-٤}{-٢} \geq \frac{-٢س}{-٢} > \frac{٣}{-٢}$

$٢ \geq س > \frac{-٣}{٢}$

مجموعة الحل $(\frac{-٣}{٢} ، ٢]$



## حل ص ٣٧

حاول أن تحل

(٦) في مثال (٦) هل يصبح عرض الشركة المنافسة أفضل إذا لم تفرض أموال كلفة شحن البضاعة

٤ س ≤ ٣ س + ٢٥

س ≤ ٢٥

لا يزال عرض الشركة أفضل عرض

(٧) (أ) ٢(٢ س − ٨) > ٤ س + ٢

٤ س − ١٦ > ٤ س + ٢

٤ س − ٤ س − ١٦ > ٤ س − ٤ س + ٢

٠ س − ١٦ + ١٦ > ٢ + ١٦

٠ س > ١٨ ليس لها حل في ح

(ب) ٣ س + ٧ > ٣ (س − ٣)

٣ س + ٧ > ٣ س − ٩

٣ س − ٣ س + ٧ − ٧ > − ٩ − ٧

٠ س > − ١٦

مجموعة الحل ح


(٨) ٢ س > ٢ س − ١

٢ س − ٢ س > − ١

٠ س > − ١

مجموعة الحل ح

٢ س < ٢ س − ١

٢ س − ٢ س < − ١

٠ س < − ١

ليس لها حل في ح .

# الوحدة الاولى

## الاعداد والعمليات عليها

## البنود

## ١-٥ الى ١-٧

ص٣٨

# القيمة المطلقة
# Absolute Value

## سوف تتعلم

- حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة
- حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

## دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي **بُعد هذا العدد عن الصفر على خط أعداد.**
ولمّا كان البعد عددًا موجبًا، فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي.
الرمز المستخدم للقيمة المطلقة للعدد س هو |س|.

**تعريف:**

لكل عدد حقيقي س يكون:

|س| = { س إذا كان س > ٠
 ٠ إذا كان س = ٠
 −س إذا كان س < ٠

**معلومة:**
(−س) ليس بالضرورة عددًا سالبًا. (−س) هو المعكوس الجمعي للعدد س.

نلاحظ أن العدد إذا كان موجبًا أو صفرًا فإن قيمته المطلقة تساويه، أما إذا كان العدد سالبًا فإن قيمته المطلقة تساوي معكوسه الجمعي.

## بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب ∈ ح

١) |أ| ≥ ٠
٢) |−أ| = |أ|
٣) |أ×ب| = |أ|×|ب|
٤) |أ/ب| = |أ| / |ب|، حيث ب ≠ ٠
٥) |أ| ≥ أ
٦) |أ − ب| = |ب − أ|

### مثال (١)

**أعد تعريف |س − ٤| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.**

**الحل:**

|س − ٤| = { س − ٤ حيث س − ٤ > ٠
 ٠ حيث س − ٤ = ٠
 −(س − ٤) حيث س − ٤ < ٠

= { س − ٤ : س ≥ ٤
 ٤ − س : س < ٤

### حاول أن تحل

ص٢٨

١) **أعد تعريف كلّ مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة.**

أ) |س + ٣| = { س + ٣ ، س ≥ −٣
 −س − ٣ ، س < −٣

ب) |٤ − ٢س| = { ٤ − ٢س ، س ≤ ٢
 ٢س − ٤ ، س > ٢

ص ٢٩

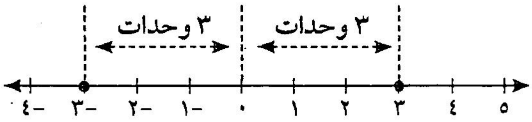
## حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن استخدام خط أعداد لحل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

يبيّن التمثيل البياني المقابل حلول المعادلة |س| = ٣.

حيث المسافة بين س، صفر تساوي ٣ وحدات

إذًا الحل: س = ٣ أو س = -٣




**نتيجة**

١) إذا كان م عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن حل المعادلة |س| = م هو: س = م أو س = -م وتكون مجموعة الحل {- م، م}.

٢) إذا كان م عددًا حقيقيًّا سالبًا فإن المعادلة |س| = م مجموعة حلها ∅

**معلومة مفيدة:**

المجموعة الخالية نعبر عنها بأحد الرمزين { } أو ∅

**مثال (٢)**

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢ص - ٣| = ٧، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: |٢ص - ٣| = ٧

| | | | |
|---|---|---|---|
| ٢ص - ٣ = ٧ | أو | ٢ص - ٣ = -٧ | قيمة ٢ص - ٣ يمكن أن تكون ٧ أو -٧. |
| ٢ص = ١٠ | | ٢ص = -٤ | إضافة +٣ إلى طرفي المعادلة. |
| ص = ٥ | | ص = -٢ | قسمة كل طرف على ٢. |

مجموعة الحل = {-٢، ٥}

| تحقق: عندما ص = ٥ | وعندما ص = -٢ |
|---|---|
| |٢ص - ٣| = ٧ | |٢ص - ٣| = ٧ |
| |٢(٥) - ٣| = ٧ | |٢(-٢) - ٣| = ٧ |
| |٧| = ٧ ✓ | |-٧| = ٧ ✓ |

**حاول أن تحل** ص ٢٩

٢) أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.

أ) |٥س + ٣| = ٨

ب) |٢س - ١| = ٠

(أ) ٥س + ٣ = ٨ أو ٥س + ٣ = -٨

٥س = ٥ | ٥س = -١١

س = ١ | س = $-\frac{11}{5}$

مجموعة الحل = {١، $-\frac{11}{5}$}

(ب) ٢س - ١ = ٠

٢س = ١

س = $\frac{1}{2}$

م.ح = {$\frac{1}{2}$}

ص ٣٣

عند حل مسائل متعددة الخطوات، ابدأ بوضع التعبير الذي يتضمن القيمة المطلقة في طرف واحد.

**مثال (٣)**

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢س + ١| + ٣ = ٠

الحل: |٢س + ١| + ٣ = ٠

|٢س + ١| = −٣

وحيث إن −٣ < ٠ (عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = ∅

**حاول أن تحل** ص ٣٠

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: ٥ + |−٢س + ٤| = ٠

|−٢س+٤| = −٥
−٥ < ٠ عدد سالب
مجموعة الحل = ∅

**مثال (٤)**

أوجد مجموعة حل المعادلة ٤ |٢س + ٣| − ٥ = ١١

الحل: ٤ |٢س + ٣| − ٥ = ١١

٤ |٢س + ٣| = ١٦ إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة

|٢س + ٣| = ٤ قسمة كل طرف على ٤

٢س + ٣ = ٤ أو ٢س + ٣ = −٤

٢س = ١ | ٢س = −٧ إضافة −٣ إلى طرفي المعادلة

س = $\frac{١}{٢}$ | س = $\frac{-٧}{٢}$ قسمة كل طرف على ٢

مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢} ، \frac{-٧}{٢}\right\}$

**حاول أن تحل** ص ٣٦

٤ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين:

أ ٣|٢س + ٤| −٦ = ٠

ب |٥س − ٤| + ٣ = ٠

|٥س−٤| = −٣
−٣ < ٠ عدد سالب
م.ح = ∅

٣|٢س+٤| = ٦
|٢س+٤| = ٢
٢س+٤ = ٢ أو ٢س+٤ = −٢
٢س = −٢ | ٢س = −٦
س = −١ | س = −٣
م.ح = {−١ ، −٣}

## حاول أن تحل

[٥] م. |س − ٥| = |٢س + ٣|

<u>المساواة</u>

س − ٥ = ٢س + ٣ أو س − ٥ = −٢س − ٣

س − ٢س = ٣ + ٥ ، س + ٢س = ٥ − ٣

−س = ٨ ، ٣س = ٢

س = −٨ ، س = $\frac{٢}{٣}$

م.ح = {−٨ ، $\frac{٢}{٣}$}

<u>تربيع الطرفين</u>:

(س − ٥)$^{٢}$ = (٢س + ٣)$^{٢}$

س$^{٢}$ − ١٠س + ٢٥ = ٤س$^{٢}$ + ١٢س + ٩

س$^{٢}$ − ٤س$^{٢}$ − ١٠س − ١٢س + ٢٥ − ٩ = ٠

−٣س$^{٢}$ − ٢٢س + ١٦ = ٠

٣س$^{٢}$ + ٢٢س − ١٦ = ٠

(٣س − ٢)(س + ٨) = ٠

٣س − ٢ = ٠ أو س + ٨ = ٠

س = $\frac{٢}{٣}$ ، س = −٨

م.ح = {−٨ ، $\frac{٢}{٣}$}

تابع ص ٣٢ حاول أن تحل
رقم ٥ ب

(ب) $|س - ٥| = |س - ٧|$

المساواة: $س - ٥ = س - ٧$ أو $س - ٥ = -س + ٧$

$س - س = ٥ - ٧$ $س + س = ٧ + ٥$

$٠ = -٢$ $٢س = ١٢$

مرفوض $س = ٦$

م.ح = {٦}.

تربيع الطرفين:

$(س - ٥)^٢ = (س - ٧)^٢$

$س^٢ - ١٠س + ٢٥ = س^٢ - ١٤س + ٤٩$

$-١٠س + ١٤س + ٢٥ - ٤٩ = ٠$

$٤س - ٢٤ = ٠$

$٤س = ٢٤$ $س = ٦$

م.ح = {٦}.

ص ٣٣

**حاول أن تحل**

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة: |٤س − ١| = س + ٢.

$س + ٢ \geq ٠$ ، $س \geq -٢$

$٤س - ١ = س + ٢$ $٤س - ١ = -س - ٢$

$٣س = ٣$ $٥س = -١$

$س = ١$ $س = -\frac{١}{٥}$

$١ \in (-٢، \infty)$ $\in (-٢، \infty)$

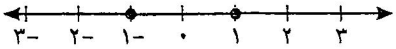
م.ح = $\{١، -\frac{١}{٥}\}$

ص ٣٣

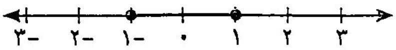
## حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن أيضًا حل متباينات تتضمن قيمًا مطلقة باستخدام خط أعداد.

يبيّن التمثيل البياني الأول حلول المتباينة |س| ≥ ١.



يبيّن التمثيل البياني الثاني حلول المتباينة |س| ≤ ١.



**تذكر:**
|س| ≥ ١ تعني أن بعد س عن الصفر هو أصغر من أو يساوي ١.

**تعميم**

ليكن أ عددًا حقيقيًا موجبًا.

١) |س| ≥ أ تكافئ -أ ≥ س ≥ أ

٢) |س| ≤ أ تكافئ س ≤ أ أو س ≥ -أ

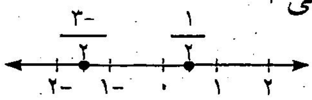
**مثال (٧)**

أوجد مجموعة حل المتباينة ٤|٢س + ١| + ٤ ≥ ١٢، ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

الحل: ٤|٢س + ١| + ٤ ≥ ١٢

| | |
|---|---|
| ٤|٢س + ١| ≥ ٨ | إضافة (-٤) إلى طرفي المعادلة |
| |٢س + ١| ≥ ٢ | قسمة كل طرف على ٤ |
| -٢ ≥ ٢س + ١ ≥ ٢ | كتابة المتباينة المكافئة |
| -٣ ≥ ٢س ≥ ١ | إضافة (-١) |
| $\frac{-٣}{٢}$ ≥ س ≥ $\frac{١}{٢}$ | القسمة على ٢ |

مجموعة الحل = [-$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$]



**حاول أن تحل** ص ٣٣

٧) أوجد مجموعة حل المتباينة |$\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٤}{٥}$| < ٠,٦ ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

-٠,٦ < $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٤}{٥}$ < ٠,٦ اضافة ٠,٨ للطرفين

٠,٢ < ٠,٥ س < ١,٤ القسمة على ٠,٥

$\frac{٢}{٥}$ < س < $\frac{١٤}{٥}$

م.ح = ($\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{١٤}{٥}$)

## مثال (٨)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥، ومثّل الحل على خط أعداد.

الحل: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥

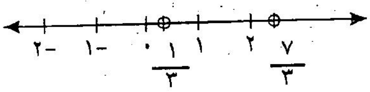
٢|٣م − ٤| > ٦ إضافة ١ إلى طرفي المتباينة

|٣م − ٤| > ٣ قسمة كل طرف على ٢

٣م − ٤ > ٣ أو ٣م − ٤ < −٣ كتابة المتباينة المكافئة

٣م > ٧ | ٣م < ١ بسّط

م > $\frac{٧}{٣}$ | م < $\frac{١}{٣}$ قسمة كل طرف على ٣



مجموعة الحل = $\left(\frac{٧}{٣} ، \infty\right) \cup \left(-\infty ، \frac{١}{٣}\right)$

### حاول أن تحل ص ٣٤

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة: $\left|\frac{٣}{٤} - س\right| \le \frac{٧}{٨}$ ومثّل الحل على خط أعداد.

$-\frac{٧}{٨} \ge \frac{٣}{٤} - س$ $\frac{٣}{٤} - س \ge \frac{٧}{٨}$

$-\frac{١٣}{٨} \ge -س$ $-س \ge \frac{١}{٨}$

م.ح = $\left(-\infty ، -\frac{١}{٨}\right] \cup \left[\frac{١٣}{٨} ، \infty\right)$

## مثال (٩) تطبيقات حياتية

رياضة: يبلغ طول قطر دائرة مرمى كرة السلة ٤٥ سم مع هامش خطأ لا يزيد على ١ سم.

أ اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن قطر دائرة مرمى تحقق هذا الشرط.

ب أوجد قيم طول القطر المقبولة ومثّلها على خط أعداد.

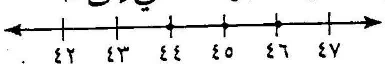
الحل:

ليكن س طول قطر دائرة مرمى كرة سلة، وحيث إن س لا يزيد أو ينقص عن ٤٥ سم بأكثر من ١ سم، فإن قيم س تحقق |س − ٤٥| ≤ ١.

−١ ≤ س − ٤٥ ≤ ١

٤٤ ≤ س ≤ ٤٦

مجموعة الحل = [٤٤ ، ٤٦] أي أن قيم طول القطر المقبولة تنتمي إلى [٤٤ ، ٤٦]



### حاول أن تحل ص ٣٤

٩ درجة حموضة عصير الطماطم هي ٤ مع هامش سماح ٠,٢. اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن درجات الحموضة المقبولة. وحلها ثم بيّن الحل على خط أعداد.

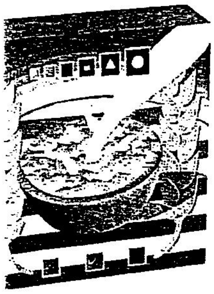
|س − ٤| ≤ ٠,٢

−٠,٢ ≤ س − ٤ ≤ ٠,٢

٣,٨ ≤ س ≤ ٤,٢

م.ح = [٣,٨ ، ٤,٢]

## مثال (١٠) تطبيقات حياتية



يبلغ وزن عبوة رقائق الذرة ٤٥٠ جرامًا. يختار مراقب الجودة بعض العبوات للتحقق من زنتها.

تلغى كل علبة يزيد الفرق بين وزنها ووزن عبوة الذرة عن ٥ جم.

اكتب متباينة تبيّن أوزان العبوات غير المقبولة ومثّل الحل على خط أعداد.

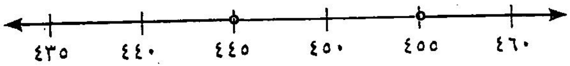
الحل:

لتكن س وزن العبوة. العبوات غير المقبولة هي التي يزيد وزنها أو يقل عن الوزن المبين بأكثر من ٥ جم.

أي |س − ٤٥٠| > ٥

س − ٤٥٠ > ٥ أو س − ٤٥٠ < −٥

س > ٤٥٥ أو س < ٤٤٥




**حاول أن تحل** ص ٢٥

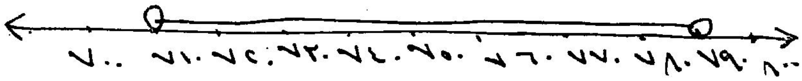
(١٠) يعرض أحد المحلات المثلجات في عبوات تزن ٧٥٠ جرامًا. عند التحقق من الوزن تقبل العبوات التي يقل الفرق وزنها ووزن العبوة المعتمد عن ٤٠ جرامًا.

اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تبيّن أوزان العبوات المقبولة ومثّل الحل على خط أعداد.

|س − ٧٥٠| < ٤٠

−٤٠ < س − ٧٥٠ < ٤٠

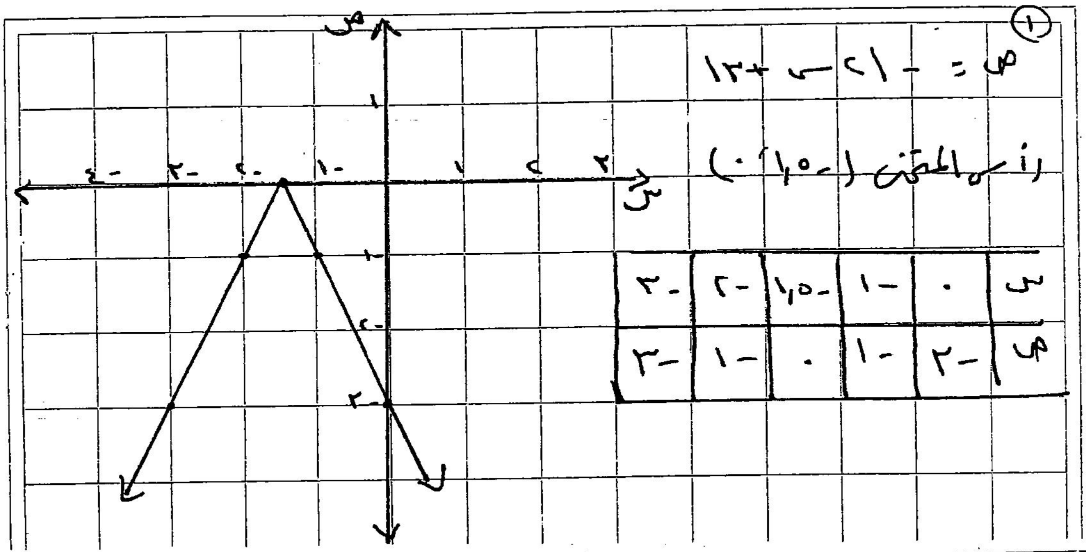
٧١٠ < س < ٧٩٠ ح.م (٧١٠، ٧٩٠)



١ - ٥ دالة القيمة المطلقة

**حاول أن تحل** ص ٣٦

١ ارسم بيانيًّا الدلة: ص = -|٢س + ٣|.



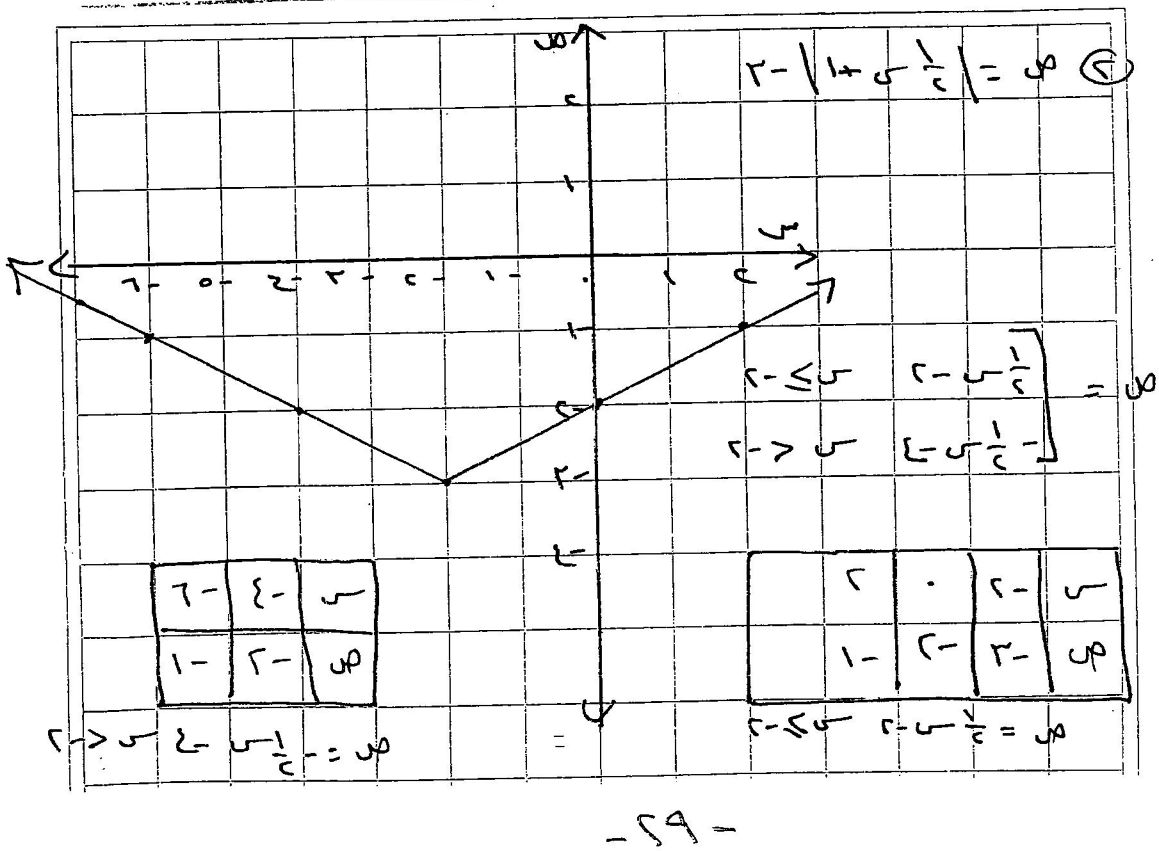
ص = -|٢س + ٣|

رأس المنحنى (-١٫٥ ، ٠)

| س | ٠ | -١ | -١٫٥ | -٢ | -٣ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | -٣ | -١ | ٠ | -١ | -٣ |

**حاول أن تحل** ص ٣٧

٢ ارسم بيانيًّا الدالة: ص = $\left|\frac{1}{2}\right.$ س + ١$\left.\right|$ - ٣ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.



ص = |$\frac{1}{2}$ س + ١| - ٣

ص = { $\frac{1}{2}$ س - ٢ ، س ≥ -٢ ؛ -$\frac{1}{2}$ س - ٤ ، س < -٢ }

| س | -٢ | ٠ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ص | -٣ | -٢ | -١ |

ص = $\frac{1}{2}$ س - ٢ ، س ≥ -٢

| س | -٤ | -٦ |
|---|---|---|
| ص | -٢ | -١ |

ص = -$\frac{1}{2}$ س - ٤ ، س < -٢

ص ٣٨

| س − ٧ = ٢س + ٤ | أو | س − ٧ = −٢س − ٤ |
|---|---|---|
| ٢س − س = −٧ − ٤ | | س + ٢س = ٧ − ٤ |
| س = −١١ مرفوضة، لماذا؟ | | ٣س = ٣ |
| | | س = ١ |

يبعد منزل إبراهيم ١ كم عن الدوّار لجهة المكتبة العامة.

### حاول أن تحل  ص ٣٨

(٣) في مثال (٣)، ناقش حل المسألة إذا كانت المكتبة العامة تبعد ٤ كم عن الدوّار.

|٤ − س| = |٢س + ٤|
|٤ − س| = |٢س + ٤|
٤ − س = ٢س + ٤
٣س = ٠
س = ٠
أو ٤ − س = −٢س − ٤
س = −٨ مرفوض
يقع منزل ابراهيم عند الدوار

## رسم بيان دوال المطلق باستخدام بعض التحويلات الهندسية  ص ٣٨

## Graph of Absolute Value Functions Using some Geometric Transformations

سوف نستخدم الإزاحة (الانسحاب) أفقيًا أو رأسيًا أو الاثنين معًا في رسم بعض دوال القيمة المطلقة.

### مثال (٤)

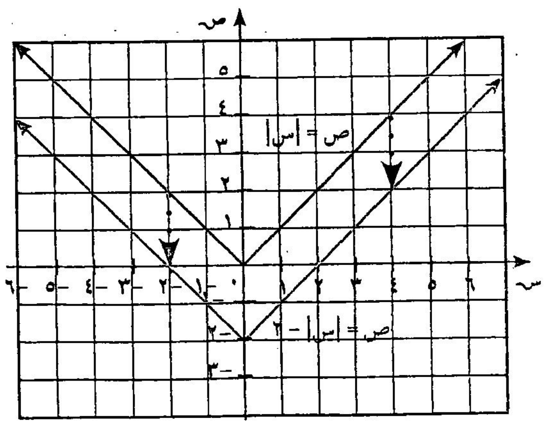
ارسم بيان كل من الدالتين: ص = |س|، ص = |س| − ٢.

صف كيف يرتبط الرسم البياني للدالة ص = |س| −٢ بالرسم البياني للدالة ص = |س|.

الحل:

اصنع جدول قيم، ثم ارسم بيانيًا.

| س | ص = \|س\| | ص = \|س\| −٢ |
|---|---|---|
| −٤ | ٤ | ٢ |
| −٢ | ٢ | ٠ |
| ٠ | ٠ | −٢ |
| ٢ | ٢ | ٠ |
| ٤ | ٤ | ٢ |




لكل قيمة للمتغير س، تكون قيمة ص = |س| −٢ أصغر بـ ٢ من قيمة ص = |س|.

الرسم البياني لِـ ص = |س| −٢ هو صورة للرسم البياني لِـ ص = |س| بعدِ إزاحته وحدتين إلى أسفل.

## حاول أن تحل

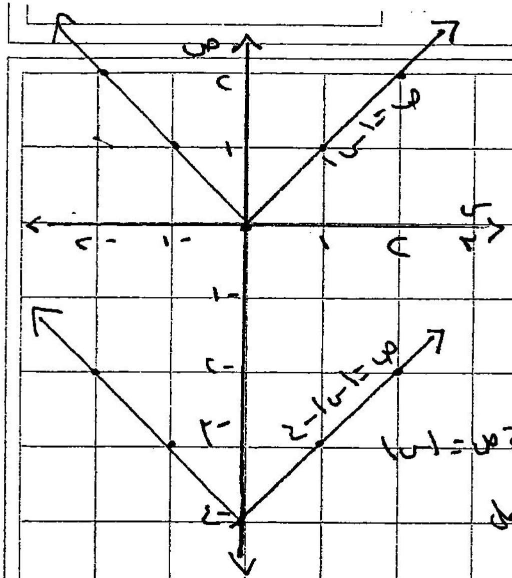
٤ لكل زوج من الدوال، قارن بين الرسمين البيانيين. صف كيف يتم الانتقال من الرسم البياني الأول إلى الثاني.

أ ص = |س|، ص = |س| - ٤

ب ص = -|س|، ص = -|س| + ٣

(أ) ص = |س| ، ص = |س| - ٤

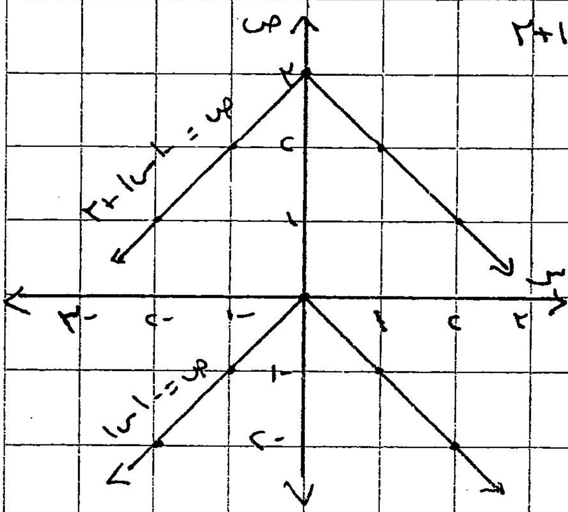
| س | ص = \|س\| | ص = \|س\| - ٤ |
|---|---|---|
| ٠ | ٠ | -٤ |
| ١ | ١ | -٣ |
| ٢ | ٢ | -٢ |
| -١ | ١ | -٣ |
| -٢ | ٢ | -٢ |



أزح الرسم البياني للدالة ص = |س| أربع وحدات لأسفل

(ب) ص = -|س| ، ص = -|س| + ٣

| س | ص = -\|س\| | ص = -\|س\| + ٣ |
|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٣ |
| ١ | -١ | ٢ |
| ٢ | -٢ | ١ |
| -١ | -١ | ٢ |
| -٢ | -٢ | ١ |



أزح الرسم البياني للدالة ص = -|س| ثلاث وحدات لأعلى

ص ٤٠

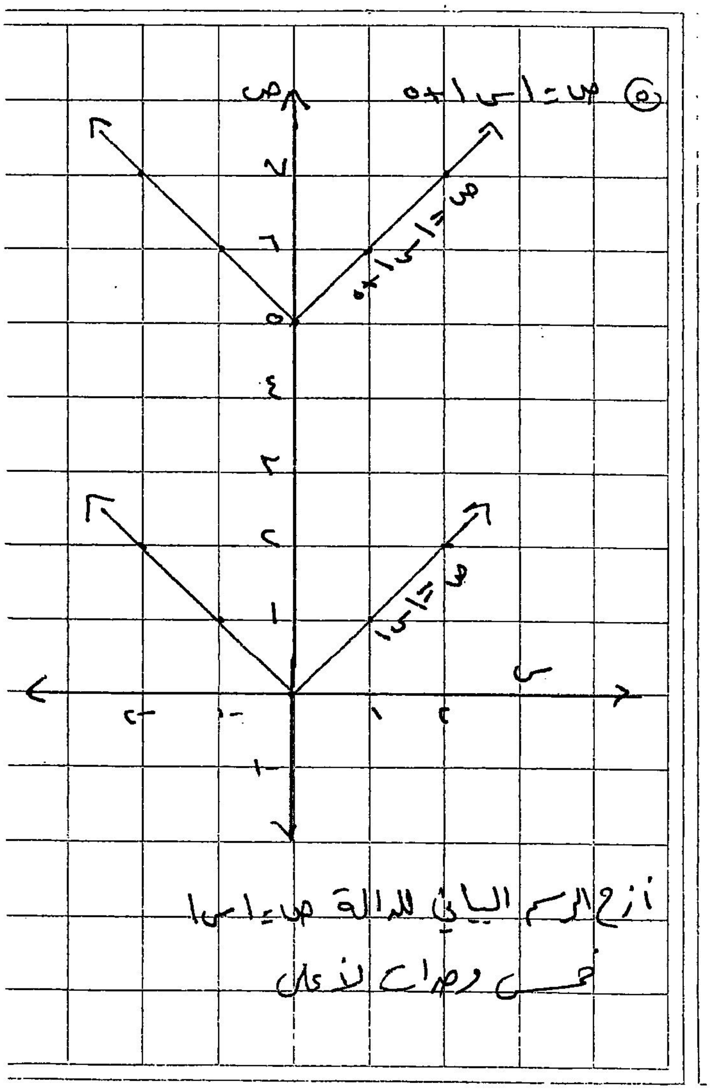
**حاول أن تحل**

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س| + ٥ .

**ملاحظة:** يمكنك عمل جدول للقيم وتحديد بعض النقاط للتحقق من صحة الرسم.

**يتشارك الانسحاب الأفقي مع الانسحاب الرأسي ببعض الخصائص.**

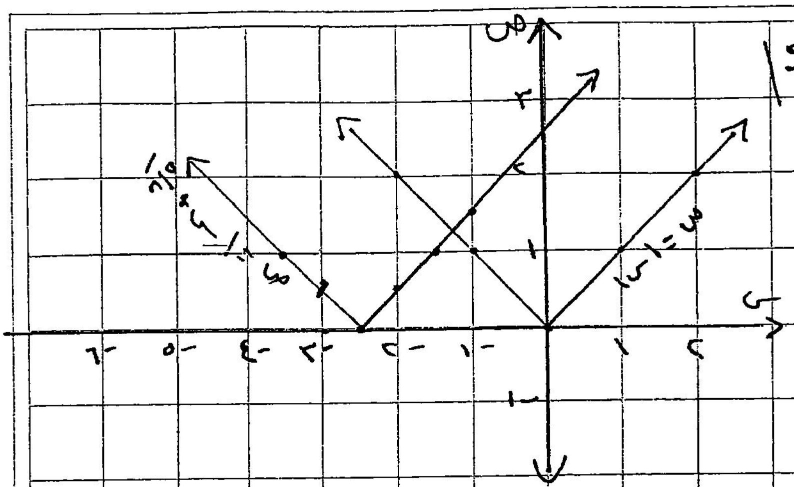
**الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| (حيث ل عدد حقيقي موجب) هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = |س| ، ل وحدة إلى جهة اليمين.**



## حاول أن تحل

٦ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = $\left|س + \frac{٥}{٢}\right|$ .

٦ ص = $\left|س + \frac{٥}{٢}\right|$



ازاحة رسم ص = |س| وحدتان ونصف وحدة إلى اليسار

## حاول أن تحل

ص ٤١

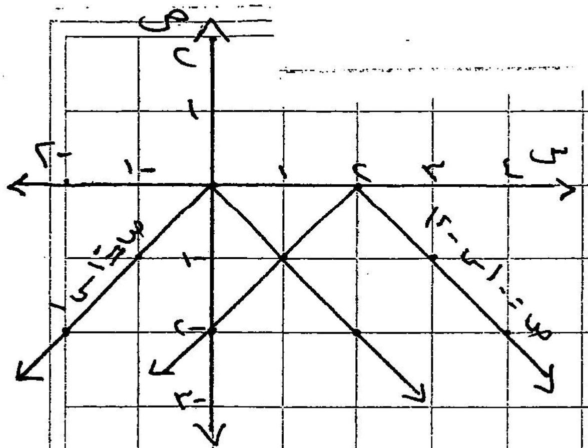
٧ لكلٍّ من الدالتين، حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الانسحاب.

أ ص = −|س − ٢| .

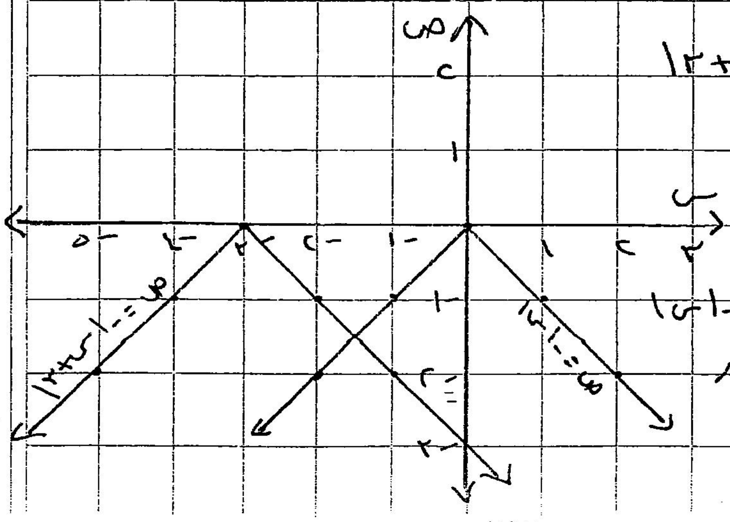
ب ص = −|س + ٣| .

أ ص = −|س − ٢|

ازاحة رسم الدالة ص = −|س| وحدتان إلى اليمين .



ب ص = −|س + ٣|



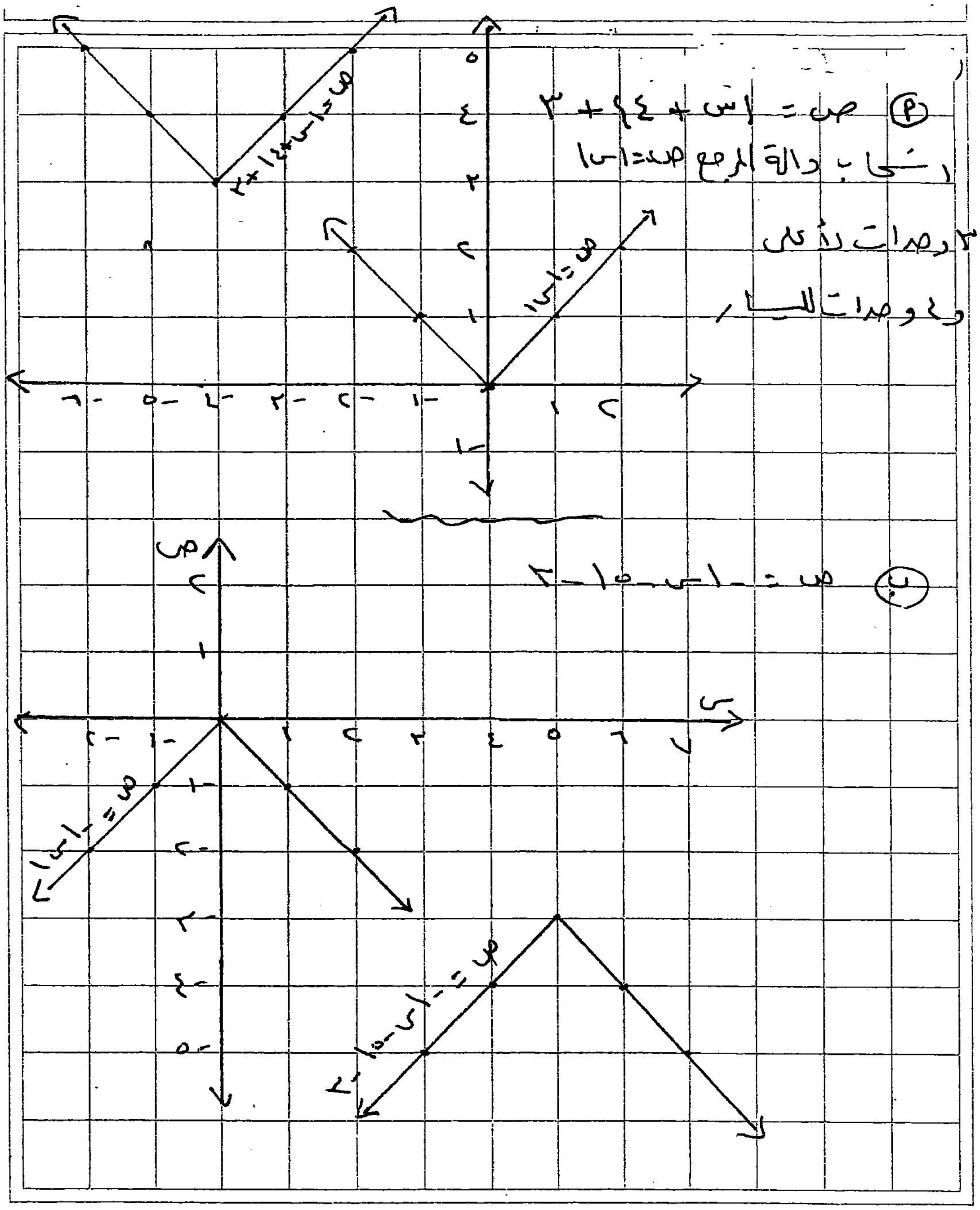
ازاحة رسم الدالة ص = −|س| ثلاث وحدات لليسار

حاول أن تحل ص ٤٢

٨ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة:

أ ص = |س + ٤| + ٣

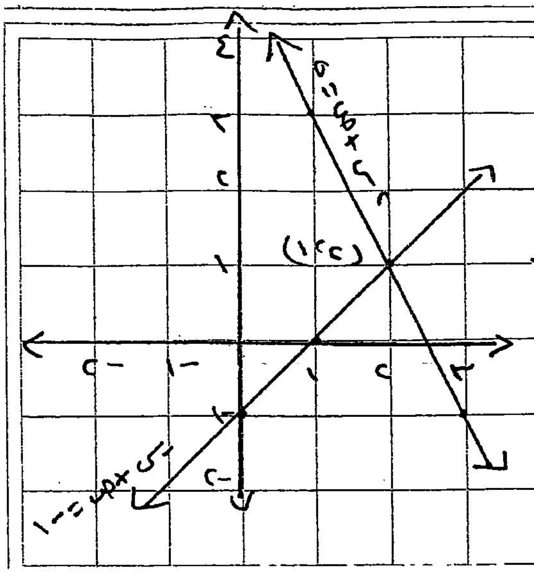
ب ص = -|س - ٥| - ٣



ص ٤٤

## حاول أن تحل

① أوجد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ٢س + ص = ٥ \\ -س + ص = -١ \end{array}\right.$ بيانيًا وتحقق من الحل.




① $\left\{\begin{array}{l} ٢س + ص = ٥ \\ -س + ص = -١ \end{array}\right.$

٢س + ص = ٥

| س | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|
| ص | ٣ | ١ | -١ |

-س + ص = -١

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ص | -١ | ٠ | ١ |

٢ × ٢ + ١ = ٥
٥ = ٥ ✓

-٢ + ١ = -١
-١ = -١ ✓

م.ح = {(٢، ١)}

ص ٤٥ ص ٤٣

## حاول أن تحل

② استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\left\{\begin{array}{l} ٢س + ٣ص = ١١ \\ -٢س + ٤ص = ١٠ \end{array}\right.$

٢س + ٣ص = ١١ ①
-٢س + ٤ص = ١٠ ②
بالجمع
٧ص = ٢١
$\boxed{ص = ٣}$ بالتعويض في ①
٢س + ٩ = ١١
$\boxed{س = ١}$
مجموعة الحل = {(١، ٣)}

٢س + ٣ص = ٣ اختر إحدى المعادلتين.

٢(٣) + ٣ص = ٣ عوّض عن س بـ ٣ في المعادلة (١)

٦ + ٣ص = ٣

٣ص = -٣

ص = -١

مجموعة الحل = {(٣، -١)}

٢م + ٣ل = ١٢
بضرب ② في ٣
١٥م - ٣ل = ٣٩ بالجمع
١٧م = ٥١
م = ٣ بالتعويض في ①
٦ + ٣ل = ١٢
ل = ٢
م.ح = {(٣، ٢)}

**حاول أن تحل** ص ٤٦

③ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام {٢م + ٣ل = ١٢ ①، ٥م - ل = ١٣ ②}

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًّا بطريقة التعويض.

حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

## مثال (٤)

استخدم طريقة التعويض لإيجاد مجموعة حل النظام {٣س - ص = ١، ٣س - ٢ص = ٥}.

الحل: في المعادلة الأولى (تم اختيارها لأنها أسهل)، حدّد قيمة ص بدلالة س.

٣س - ص = ١

ص = ٣س - ١

في المعادلة الثانية عوّض عن ص بقيمتها:

٣س - ٢(٣س - ١) = ٥

٣س - ٦س + ٢ = ٥ بسّط

-٣س = ٣

س = -١

عوّض عن س بـ (-١) في ص = ٣س - ١

ص = ٣(-١) - ١

ص = -٤

مجموعة الحل: {(-١؛ -٤)}

بالتعويض عن ت في المعادلة الثانية
٥ر - ٤(٢ر + ٣) = ٦
٥ر - ٨ر - ١٢ = ٦
-٣ر = ١٨
ر = -٦
ت = ٢×-٦ + ٣
ت = -٩
م.ح = {(-٦، -٩)}

**حاول أن تحل** ص ٤٦

④ أوجد مجموعة حل النظام {ت = ٢ر + ٣، ٥ر - ٤ت = ٦} مستخدمًا طريقة التعويض.

ص ٤٧

**مثال (٥)** **تطبيقات حياتية**

دفع محمد ٢,٨٠٠ دينار ثمن ٦ أكواب شاي وقطعتي حلوى، ودفع سالم في المكان نفسه ٥,٢٠٠ دنانير ثمن كوبين من الشاي و٦ قطع حلوى. ما سعر كوب الشاي وما سعر قطعة الحلوى؟

الحل:

ليكن ش سعر كوب الشاي، حـ سعر قطعة الحلوى

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| محمد | ٦ أكواب شاي | و | قطعتا حلوى | دفع | ٢,٨٠٠ دينار |
| | ٦ × ش | + | ٢ × حـ | = | = ٢,٨٠٠ |
| سالم | كوبان من الشاي | و | ٦ قطع حلوى | دفع | ٥,٢٠٠ دنانير |
| | ٢ × ش | + | ٦ × حـ | = | = ٥,٢٠٠ |

لمعرفة الأسعار نحل النظام: $\begin{cases} ٦ش + ٢حـ = ٢,٨٠٠ \\ ٢ش + ٦حـ = ٥,٢٠٠ \end{cases}$

باستخدام أي من الطرائق التي سبق عرضها نحصل على: ش = ٠,٢٠٠، حـ = ٠,٨٠٠.

أي أن سعر كوب الشاي = ٠,٢٠٠ دينار، وسعر قطعة الحلوى = ٠,٨٠٠ دينار.

**حاول أن تحل** ص ٤٧

٥ وزعت ٦ كجم من المربى في ١٤ عبوة، بعض العبوات يحتوي على ٥٠٠ جم وبعضها الآخر على ٣٧٥ جم. ما عدد العبوات من كل نوع؟

س عدد العبوات التي تحتوي ٥٠٠ جم

ص عدد العبوات التي تحتوي ٣٧٥ جم

س + ص = ١٤ $\boxed{س = ١٤ - ص}$

٥٠٠ س + ٣٧٥ ص = ٦٠٠٠ بالتعويض عن قيمة س

٥٠٠ × (١٤ - ص) + ٣٧٥ ص = ٦٠٠٠

٧٠٠٠ - ٥٠٠ ص + ٣٧٥ ص = ٦٠٠٠

- ١٢٥ ص = - ١٠٠٠ $\boxed{ص = ٨}$

س = ١٤ - ٨

$\boxed{س = ٦}$

عدد العبوات التي تحتوي ٥٠٠ جم = ٦ عبوات

عدد العبوات التي تحتوي ٣٧٥ جم = ٨ عبوات

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد ص ٤٨

بإضافة ٢٥ إلى طرفي المعادلة نجد أن:

$\text{س}^{٢} + ١٠\text{س} + ٢٥ = -١٦ + ٢٥$

$(\text{س} + ٥)^{٢} = ٢٥ - ١٦$

$(\text{س} + ٥)^{٢} = ٩$

$\text{س} + ٥ = \pm ٣$

$\text{س} = -٥ \pm ٣$ أي $\text{س} = -٢$ أو $\text{س} = -٨$ مجموعة الحل: $\{(-٢، -٨)\}$.

**حاول أن تحل** ص ٤٩

① حلّ المعادلة: $\text{س}^{٢} - ٨\text{س} = -١٥$ بإكمال المربع.

إضافة ١٦ للطرفين

$\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦ = ١٦ - ١٥$

$(\text{س} - ٤)^{٢} = ١$

$\text{س} - ٤ = \mp ١$

$\text{س} = ٥$ ، $\text{س} = ٣$ م . ح = $\{٥ ، ٣\}$

## ٢- استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد ص ٤٩

## Solving Quadratic Equations by Using the Quadratic Formula

تستخدم طريقة إكمال المربع لاستنتاج قانون عام لحل أي معادلة من الدرجة الثانية على الصورة: $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = ٠$،

وذلك بأخذ مثال عددي: حلّ المعادلة: $٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١ = ٠$

**المثال العددي:**

$٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ١ = ٠$

$\text{س}^{٢} + \frac{٦}{٢}\text{س} + \frac{١}{٢} = ٠$ بالقسمة على ٢. لماذا؟

$\text{س}^{٢} + ٣\text{س} = -\frac{١}{٢}$

$\text{س}^{٢} + ٢\left(\frac{٣}{٢}\right)\text{س} + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٢}$

$\left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٩}{٤} - \frac{١}{٢}$

$\left(\text{س} + \frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٧}{٤}$

$\text{س} + \frac{٣}{٢} = \pm\sqrt{\frac{٧}{٤}}$

$\text{س} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٧}}{٢}$

**الصورة العامة:**

$\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = ٠$

$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٠$ بالقسمة على أ حيث $\text{أ} \neq ٠$

$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

$\text{س}^{٢} + ٢\left(\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\text{س} + \left(\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} - \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = \frac{\text{ب}^{٢}}{(٢\text{أ})^{٢}} - \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = \frac{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}{٤\text{أ}^{٢}}$

$\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}{٤\text{أ}^{٢}}}$

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\text{أ}}$

من ذلك نستنتج أن:

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:

حلّ المعادلة: $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = ٠$، حيث $\text{أ} \neq ٠$ هو: $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\text{أ}}$

**حاول أن تحل** ص ٥٠

(٢) باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

(أ) $س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$ (ب) $س(س - ٢) = ٧$

(٢) (أ) $س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$

$أ = ١$ $ب = -٦$ $جـ = ٥$

$ب^٢ - ٤أجـ = (-٦)^٢ - ٤ × ١ × ٥ = ١٦$

$$س = \frac{-ب \mp \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{+٦ \mp \sqrt{١٦}}{٢ × ١}$$

$س = \frac{٦ + ٤}{٢} = ٥$ أو $س = \frac{٦ - ٤}{٢} = ١$

$م.ح = \{٥ ، ١\}$

(ب) $س(س - ٢) = ٧$

$س^٢ - ٢س - ٧ = ٠$ $أ = ١$ $ب = -٢$ $جـ = -٧$

$ب^٢ - ٤أجـ = (-٢)^٢ - ٤ × ١ × -٧ = ٣٢$

$$س = \frac{-ب \mp \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٢ \mp \sqrt{٣٢}}{٢ × ١}$$

$س = \frac{٢ + \sqrt{٣٢}}{٢} = ٣,٨٣$ أو $س = \frac{٢ - \sqrt{٣٢}}{٢} = -١,٨٣$

$م.ح = \{٣,٨٣ ، -١,٨٣\}$

## حاول أن تحل   ص ٥٩

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلة: ٤س^٢ = ١٣س - ٩

٤س^٢ - ١٣س + ٩ = ٠

ا = ٤   ب = -١٣   جـ = ٩

ب^٢ - ٤ ا جـ = (-١٣)^٢ - ٤ × ٤ × ٩ = ٢٥

س = (-ب ± √(ب^٢ - ٤ ا جـ)) / ٢ا = (١٣ ± √٢٥) / (٢ × ٤)

س = ١ أو س = ٩/٤

م.ح = {١ ، ٩/٤}.

## حاول أن تحل   ص ٥٢

٤ قذفت رصاصة عموديًّا إلى أعلى بسرعة ٤٠ مترًا/ ثانية. أوجد الزمن (ن ثانية) الذي تستغرقه الرصاصة كي تصل إلى ارتفاع ٨٠ مترًا علمًا أن العلاقة بين الزمن (ن) والارتفاع (ف) والسرعة (ع) هي:

ف = -٥ن^٢ + ع ن، ع = السرعة بالمتر/ ث.

-٥ن^٢ + ٤٠ن - ٨٠ = ٠

ا = -٥   ب = ٤٠   جـ = -٨٠

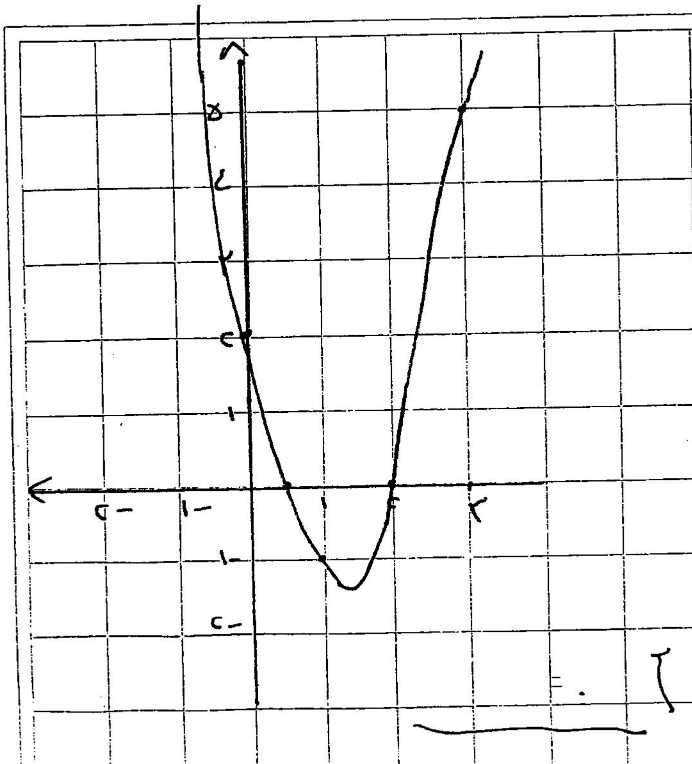
ب^٢ - ٤ ا جـ = ٤٠^٢ - ٤ × -٥ × -٨٠ = صفر

س = (-ب ± √(ب^٢ - ٤ ا جـ)) / ٢ا

تصل بعد ٤ ثواني

## حاول أن تحل   ص ٥٣

٥ أوجد نوع جذري المعادلة: ٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠، تحقق من الحل جبريًّا وبيانيًّا.



٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠

ا = ٢   ب = -٥   جـ = ٢

Δ = ب^٢ - ٤ ا جـ

Δ = (-٥)^٢ - ٤ × ٢ × ٢ = ٩

يوجد جذران حقيقيان مختلفان

س = (-ب ± √Δ) / ٢ا = (٥ ± √٩) / (٢ × ٢)

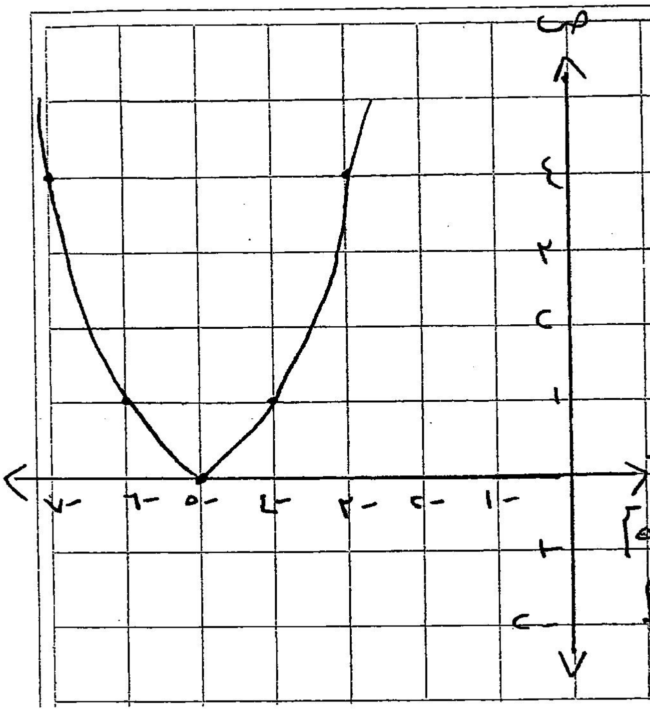
س = ٢ أو س = ١/٢

| س | ٢ | ١/٢ | ٠ | ١ | ٣ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٠ | ٠ | ٢ | -١ | ٥ |

م.ح = {٢ ، ١/٢}

## حاول أن تحل   ص ٤٣

(٦) أوجد نوع جذري المعادلة: $س^2 + ١٠س + ٢٥ = ٠$، تحقق من الحل بيانيًّا.



(٦) $س^2 + ١٠س + ٢٥ = ٠$

أ = ١ ، ب = ١٠ ، جـ = ٢٥

$\Delta$ = ب$^2$ − ٤ أ جـ

$\Delta$ = ١٠$^2$ − ٤ × ١ × ٢٥ = صفر

يوجد جذران حقيقيان متساويان

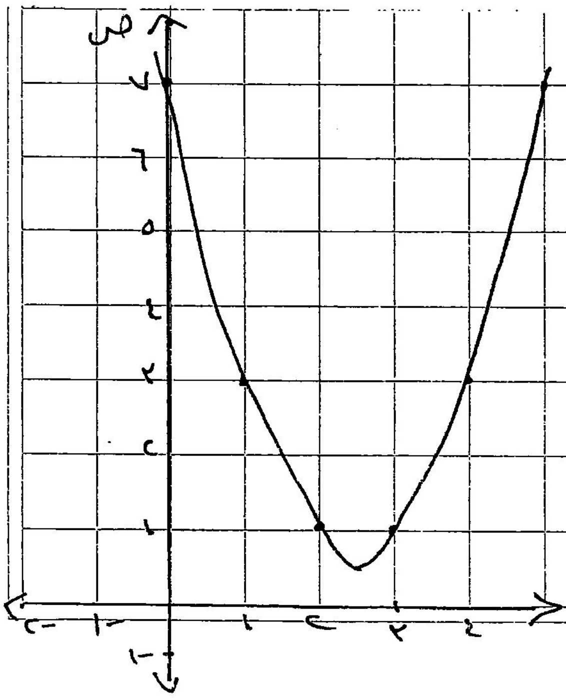
س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ} = \frac{-١٠ \pm \sqrt{صفر}}{٢ \times ١}$

س = −٥ ، ح.م = {−٥}

| س | −٥ | −٤ | −٣ | −٦ | −٧ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٠ | ١ | ٤ | ١ | ٤ |

## حاول أن تحل   ص ٥٤

(٧) أوجد نوع جذري المعادلة: $س^2 - ٥س + ٧ = ٠$، وتحقق من الحل بيانيًّا.



(٧) $س^2 - ٥س + ٧ = ٠$

أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٧

$\Delta$ = ب$^2$ − ٤أجـ = (−٥)$^2$ − ٤ × ١ × ٧

$\Delta$ = −٣ سالب

يوجد جذران غير حقيقيان

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | ٧ | ٣ | ١ | ١ | ٣ |

ص ٥٥

## حاول أن تحل

٨ بدون حلّ المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٤س$^٢$ − ٩س + ٣ = ٠ إذا وجدا.

ا = ٤   ب = −٩   جـ = ٣

Δ = ب$^٢$ − ٤ ا جـ = (−٩)$^٢$ − ٤×٤×٣ = ٣٣

يوجد جذران حقيقيان مختلفان

مجموع الجذرين م + ن = −ب/ا = ٩/٤

ناتج ضرب الجذرين = م ن = جـ/ا = ٣/٤

ص ٥٦

## حاول أن تحل

٩ إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: ا س$^٢$ − ٥س + ٢ = ٠ يساوي ٢/٣. فأوجد ا، ثم حلّ المعادلة.

حاصل ضرب الجذرين م ن = جـ/ا = ٢/ا = ٢/٣ ، ا = ٣

Δ = (−٥)$^٢$ − ٤×٣×٢ = ١

س = (−ب ± √Δ)/(٢ا) = (٥ ± √١)/(٢×٣)

الجذران هما: ١ ، ٢/٣

ص ٥٧

## حاول أن تحل

١٠ إذا كان جذرا المعادلة س$^٢$ − ٥س + ٦ = ٠ هما ل، م فكوّن معادلة تربيعية جذراها ٢ل، ٢م.

م + ل = −ب/ا = ٥   مجموع الجذران = ٢ل + ٢م = ٢(ل + م) = ٢×٥ = ١٠

م ل = جـ/ا = ٦   ناتج ضرب الجذرات = ٢ل × ٢م = ٤ ل م = ٤ × ٦ = ٢٤

المعادلة هي: س$^٢$ − ١٠س + ٢٤ = ٠

ص ٥٧

## حاول أن تحل

١١ أوجد معادلتين تربيعيتين جذرا كل منهما: −٤، −٣.

م + ن = −٧   م ن = ١٢

* س$^٢$ + ٧س + ١٢ = ٠ ، * ٢(س$^٢$ + ٧س + ١٢) = ٠

# الوحدة الثانية

# حساب المثلثات

## (( ملخص لأهم قوانين الوحدة الثانية ))

- العلاقة $\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
- في المثلث القائم الزاوية جيب الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جا أو sin
- جيب تمام الزاوية = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جتا أو cos
- قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$ حيث جتا أ $\neq$ ٠ ، قتا أ = $\frac{١}{\text{جا أ}}$ جا أ $\neq$ ٠
- ظل الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$ ويرمز له ظا أو tan
- ظتا أ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الضلع المقابل}}$ .
- طول القوس ل = هـ$^{د}$ × نق
- مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ جـ × جا أ
- مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{د}$ نق$^{٢}$ .
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق$^{٢}$ ( هـ$^{د}$ ـ جا هـ$^{د}$ ) .
- زاوية الارتفاع : إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي .
- زاوية الانخفاض : إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي .

٢ - ١ الزوايا وقياسها

**حاول أن تحل** ص ٦٤

١ اكتب كلًّا مما يلي بالقياس الستيني.

أ $\frac{٧}{٣٢}$ الزاوية القائمة ١٩° ٤١َ ١٥ً

ب ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة ٥٦° ١٥َ

**حاول أن تحل** ص ٦٤

٢ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٣}{٧}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني ٧٧° ٨َ ٢٤ً,٢٩

**حاول أن تحل** ص ٦٦

٣ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

أ ١,٢ د ل = هـ د × نق = ١,٢ × ٦ = ٧,٢ سم

ب (١,٥٧) د ل = ١,٥٧ × ٦ = ٩,٤٢ سم

**حاول أن تحل** ص ٦٦

٥ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

أ ٤٥° $\frac{π}{٤}$ ب ٣٠٠° $\frac{٥}{٣}π$ ج ٢٢٥° $\frac{٥}{٤}π$ د ١٥٠° $\frac{٥}{٦}π$

٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{٥}{٨} × π$ = ١١٢,٥° ب ٠,٧٥ د = ٤٢,٩٧° ج ٣,٣٥ = ١٩١,٩٤° د $\frac{π}{٥}$ = ٣٦°

٧ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\frac{π}{٢}$ = ٩٠° ب $\frac{π}{٣}$ = ٦٠° ج $\frac{π}{٦}$ = ٣٠° د $\frac{π}{٤}$ = ٤٥°

**حاول أن تحل** ص ٦٧

٧ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية: π، ٢٥٠°، $\frac{٥π}{٧}$، $-\frac{π}{٢}$، ٣٣٠°.

زاوية ربعية زاوية ربعية

**حاول أن تحل**

٨ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها نق، تحصر قوسًا طوله ل. أوجد طول القوس في الحالتين:

أ هـ د = $\frac{١}{٤}$ π ، نق = ٧ سم ل = هـ د × نق = $\frac{١}{٤}$ π × ٧ ≃ ٥,٤٩٨ سم

ب س° = ١٢٠°، نق = ٢٤ سم ل = $\frac{١٢٠ × π}{١٨٠}$ × ٢٤ ≃ ٥٠,٢٦٥ سم

# النسب المثلثية

## حاول أن تحل ص ٦٩

٩ في مثال (١٠) ما قياس الزاوية م و م٢ بالقياس الدائري وبالقياس الستيني إذا قطعت النقطة م مسافة ٤٥٠٠ كم؟

$هـ^د = \frac{ل}{نق} = \frac{٤٥٠٠}{٦٤٠٠} = \frac{٤٥}{٦٤} \simeq ٠,٧٠٣^د$

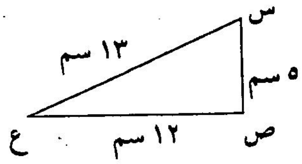
$س° = ٠,٧٠٣ \times \frac{١٨٠}{\pi} \simeq ٤٠° ١٦' ٤٤''$

ص ٧٠

## حاول أن تحل

$(س ص)^٢ + (ص ع)^٢ = ٥^٢ + ١٢^٢ = ١٦٩$

$(س ع)^٢ = ١٣^٢ = ١٦٩$




١ أ أثبت أن المثلث س ص ع قائم في صْ. المثلث قائم الزاوية في صْ

ب أوجد جاس، جاع. $جاس = \frac{مقابل}{وتر} = \frac{١٢}{١٣}$ ، $جاع = \frac{٥}{١٣}$

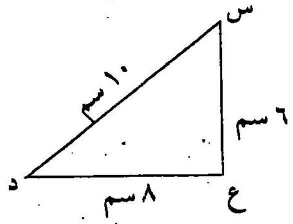
ص ٧١

## حاول أن تحل

$(س ع)^٢ + (ع د)^٢ = ٦^٢ + ٨^٢ = ١٠٠$

$(س د)^٢ = ١٠^٢ = ١٠٠$

مثلث قائم الزاوية في ع




٢ أ أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.

ب أوجد كلًّا من: جا(سْ)، جتا(سْ)، جا(دْ)، جتا(دْ).

جـ ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين سْ، دْ.

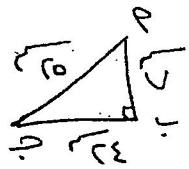
$جاس = \frac{٨}{١٠}$ ، $جتاس = \frac{٦}{١٠}$ ، $جاد = \frac{٦}{١٠}$ ، $جتاد = \frac{٨}{١٠}$ نلاحظ جاس = جتاد ، جتاس = جاد

---

$(أب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ٧^٢ + ٢٤^٢ = ٦٢٥$

$(أ جـ)^٢ = ٦٢٥$

∴ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب




$جاأ = \frac{٢٤}{٢٥}$ ، $جاجـ = \frac{٧}{٢٥}$

$جتاأ = \frac{٧}{٢٥}$ ، $جتاجـ = \frac{٢٤}{٢٥}$

$قاأ = \frac{٢٥}{٧}$ ، $قاجـ = \frac{٢٥}{٢٤}$

$قتاأ = \frac{٢٥}{٢٤}$ ، $قتاجـ = \frac{٢٥}{٧}$

ص ٧٢

## حاول أن تحل ~~ص ٨٣~~

٣ أب جـ مثلث فيه: أب = ٧ سم، ب جـ = ٢٤ سم، أجـ = ٢٥ سم.
أثبت أن △أب جـ قائم الزاوية، ثم أوجد جاأ، جتاأ، قاأ، قتاأ، جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.

## حاول أن تحل ص ٨٣

$جتا(٤٢°) = \frac{ص}{١٠}$

ص = ١٠ × جتا ٤٢ ≃ ٧,٤٣١ سم تقريبًا

٤ أوجد ص في المثال (٤).

ص ٧٣

كان نيكولاي كوبرنيك Nicolaus Copernicus (١٤٧٣م - ١٥٤٣م) عالمًا رياضيًا وفلكيًا، درس الطب وألمّ بمعظم العلوم في عصره. يعتبر أول من صاغ نظرية مركزية الشمس وأن الأرض جرم يدور في فلكها.

يعتبر كوبرنيك مؤسس الفلك الحديث.

وحدة الفلك (و.ف أو AU) تمثل متوسط المسافة بين الأرض والشمس وهي تساوي تقريبًا ١٤٩٦٠٠٠٠٠ كم.

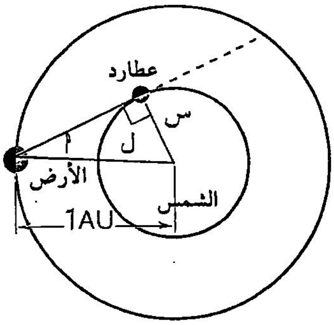
## مثال (٥) تطبيقات حياتية

**هل تعلم؟**

١ ميل ≃ ١,٦٠٩ كم

في الشكل المقابل، إذا كان ق(أ) = ٢٢,٣°،

أوجد بعد كوكب عطارد عن الشمس علمًا بأن بعد الأرض عن الشمس يساوي ١ وحدة الفلك ١AU.




الحل:

بفرض أن : س = بعد كوكب عطارد عن الشمس.

ل = بعد الأرض عن الشمس

فيكون:

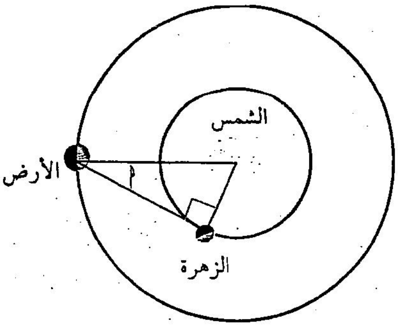
جا (٢٢,٣°) = $\frac{س}{ل}$.

∴ بعد عطارد عن الشمس = س= ل × جا (٢٢,٣°) .

≈ ١ × ٠,٣٨ ≈ ٠,٣٨ AU

### حاول أن تحل

ص ٧٢



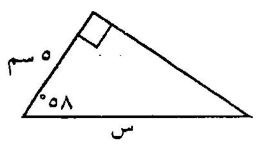

٥ أ كما في التطبيق السابق، أوجد بعد كوكب الزهرة عن الشمس علمًا بأن ق(أ) = ٤٦,١°

جا ٤٦,١ = $\frac{س}{١}$    س = ١ × جا ٤٦,١

= ٠,٧٢ ل

ب أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

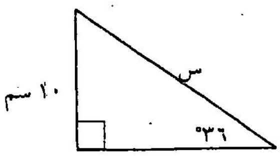
أ




جتا ٥٨° = $\frac{٥}{س}$

س = $\frac{٥}{جتا ٥٨}$ = ٩,٤٤ سم

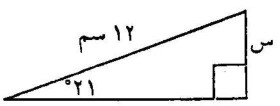
ب




جا ٣٦° = $\frac{١٠}{س}$

س = $\frac{١٠}{جا ٣٦}$ = ١٧,٠١ سم

ج




جا ٢١ = $\frac{س}{١٢}$

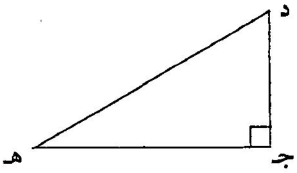
س = ١٢ × جا ٢١

س = ٤,٣ سم

ص ٧٤

## ٥ إيجاد قياس زاوية علم جيبها او جيب تمامها

قد تعلّم جيب زاوية أو جيب تمامها وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تستخدم لذلك النسب المثلثية العكسية ويرمز إليها بـ جا$^{-1}$ أو جتا$^{-1}$. تبيّن العلاقة التالية الترابط بين النسب المثلثية والنسب المثلثية العكسيّة:



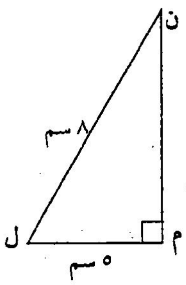

- إذا كان جاد = ص فإن جا$^{-1}$ ص = د
  جتاد = س فإن جتا$^{-1}$ س = د
- غالبًا ما تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياسات هذه الزوايا.
  نقر على Sin Shift للتعبير عن جا$^{-1}$
  وننقر على Cos Shift للتعبير عن جتا$^{-1}$.

### مثال (٦)

في الشكل المقابل، احسب ق($\hat{ل}$) لأقرب درجة.

الحل:

جتا ل = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$.




جتا ل = $\frac{٥}{٨}$ باستخدام النسب المثلثية لجيب التمام

ق($\hat{ل}$) = جتا$^{-1}$ $\frac{٥}{٨}$ جتا$^{-1}$ تسمى النسبة المثلثية العكسية لـ جتا

shift Cos ( 5 ÷ 8 ) =

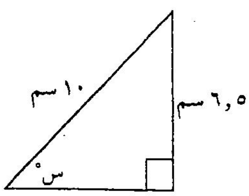
يظهر 51.317813

وبالتالي ق($\hat{ل}$) ≃ ٥١°

### حاول أن تحل ص ٧٤

٦ أوجد قيمة س° لأقرب درجة.

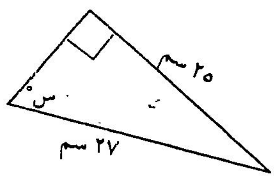
(أ)




جا س = $\frac{٦,٥}{١٠}$

س = ٤٠,٥°

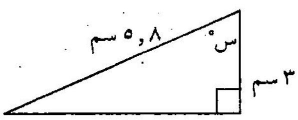
(ب)




جا س = $\frac{٢٥}{٢٧}$

س = ٦٧,٨°

(جـ)




جا س = $\frac{٣}{٥,٨}$

س = ٥٨,٩°

# ظل الزاوية ومقلوبه ص٧٥
# Tangent and Cotangent of an Angle

**سوف تتعلم**

- ما هو ظل الزاوية
- إيجاد قياس الزاوية إذا علم ظلها
- مقلوب ظل الزاوية
- حل المثلث قائم الزاوية

**عمل تعاوني**

سنعمل في مجموعات صغيرة، نختار مجموعة قياسات الزوايا
(١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ...، ٨٠°)

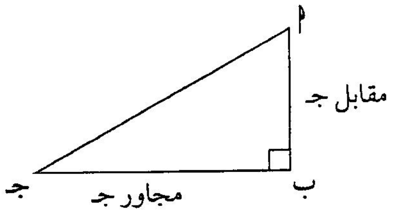
كل طالب في مجموعته يرسم مثلث أب جـ قائم الزاوية في ب، ويختار إحدى الزوايا من المثلث بحيث تنتمي إلى مجموعة قياسات الزوايا. يحسب كل طالب أطوال أضلاع المثلث باستخدام المسطرة لأقرب ملليمتر، ويستخدم الآلة الحاسبة في حساب النسب:

$\frac{\text{مقابل الزاوية جـ}}{\text{المجاور للزاوية جـ}}$ لأقرب رقمين عشريين

**في المثلث قائم الزاوية نسبة طول الضلع المقابل لزاوية حادة إلى طول الضلع المجاور للزاوية نفسها تسمى ظل الزاوية ونرمز إليها بالرمز ظاجـ وبالإنكليزية Tangent (tan).**

أي أن ظل الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

مثلًا في الشكل المقابل طاجـ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$

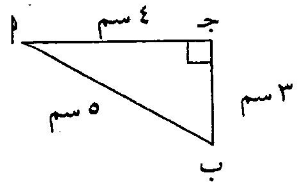



قارن بين ظا ١٠°، ظا ٢٠°، ظا ٣٠°، ظا ٤٠°، ... ماذا تستنتج؟

من العمل التعاوني السابق، يتبيّن أن قيمة ظاجـ تزداد كلما زاد قياس الزاوية جـ بين ٠°، ٩٠°.

**مثال (١)**

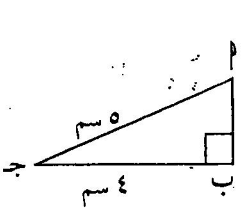
في الشكل المقابل أوجد ظل الزاوية أ، ظل الزاوية ب.

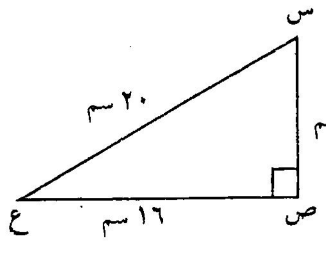



الحل: ظاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٤}$

ظاب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٣}$

**حاول أن تحل** ص٧٥ $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{١}{٤}$ $\frac{\text{أجـ}}{\text{س ع}} = \frac{١}{٤}$ $\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}} = \frac{١}{٤}$




① أ استعن بالمثلثين المجاورين في إيجاد:

$\frac{\text{أب}}{\text{س ص}}$، $\frac{\text{أجـ}}{\text{س ع}}$، $\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}$. ماذا تستنتج؟ يتشابه المثلثان

ب هل ظاس = ظاأ، ظاع = ظاجـ؟ ماذا تستنتج؟ نعم

جـ هل هذا صحيح بالنسبة إلى النسب: جاس، جاأ وكذلك جتاس، جتاأ؟ ماذا تستنتج؟
نعم في المثلثات المتشابهة النسب المثلثية متساوية

**مثال (٢)** **تطبيقات حياتية**

أراد أحد أعضاء فريق الكشافة قياس المسافة بين قمتي جبلين، فوقف على قمة أحد الجبلين عند النقطة أ وحدّد علامة مميزة أمامه على قمة الجبل الآخر ولتكن ب، ثم اتبع التالي:

1. وضع مؤشر البوصلة باتجاه العلامة المميزة ب وحدّد قراءة المؤشر.
2. سار مسافة ٥٠ مترًا على خط مستقيم عمودي على الخط المستقيم الواصل بين القمتين.
3. وضع مؤشر البوصلة مرة ثانية في اتجاه العلامة المميزة وحدّد قراءة المؤشر.
4. باستخدام قراءتي المؤشر وجد أن: ق(جـ) = ٨٦°.

استخدم ظل الزاوية في حساب المسافة بين قمتي الجبلين عند النقطة التي بدأ منها القياس.

الحل: باستخدام ظل الزاوية

ظا(٨٦°) = أب / ٥٠

أب = ٥٠ × ظا (٨٦°)


تستخدم الآلة الحاسبة

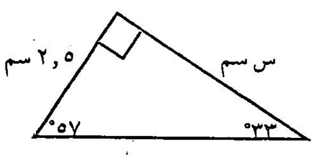
50 × TAN 86 =

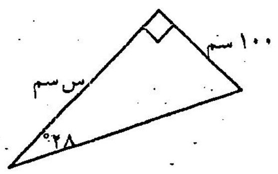
يظهر 715.03331

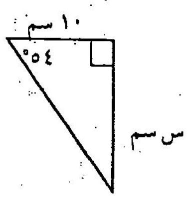
إذًا، المسافة بين قمتي الجبلين هي ٧١٥ مترًا تقريبًا.

**حاول أن تحل** ص ٧٦

2. أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

أ 


ب 


جـ 


٢,٥ / س = ظا ٣٣ — س = ٢,٥ / ظا ٣٣ = ٣,٨

١٠٠ / س = ظا ٢٨ — س = ١٠٠ / ظا ٢٨ = ١٨٨,١

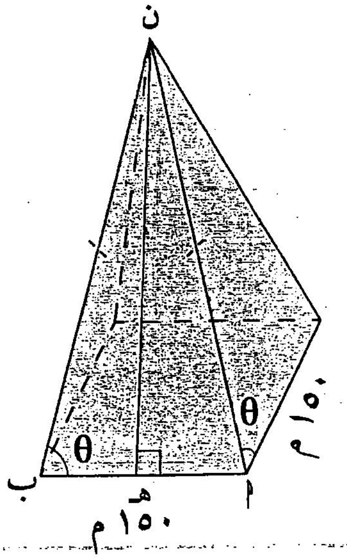
س / ١٠ = ظا ٥٤ — س = ١٠ ظا ٥٤ = ١٣,٨

ص ٧٧

## مثال (٣)

الهرم المقابل قاعدته مربعة الشكل. أوجد طول ارتفاعه المائل ل إذا كان قياس الزاوية $\theta$ يساوي ٦٠°.

الحل:




**تذكر:**
الارتفاع المائل:
هو العمود المرسوم من رأس الهرم إلى أحد أضلاع قاعدته.

في $\Delta$ن$\overline{\text{أب}}$ المتطابق الضلعين

$\overline{\text{ن هـ}} \perp \overline{\text{أب}}$

$\therefore$ هـأ = هـب = ٧٥ م

في $\Delta$ن هـ ب القائم الزاوية هـ

ظا $\theta = \frac{\text{ل}}{٧٥}$

ظا ٦٠° $= \frac{\text{ل}}{٧٥}$

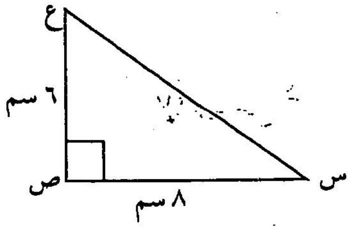
ل = ٧٥ × ظا ٦٠° $\simeq$ ١٣٠ مترًا.

طول الارتفاع المائل $\simeq$ ١٣٠ مترًا.

### ١- إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها: Finding the Measure of an Angle Knowing its Tangent

قد تعلم ظل الزاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تستخدم لذلك النسبة المثلثية العكسية ويرمز لها بالرمز ظا$^{-1}$ والعلاقة التالية تبين الترابط بين النسبة المثلثية والنسبة المثلثية العكسية. إذا كان ظا $\theta$ = س فإن ظا$^{-1}$س = $\theta$.

## مثال (٤)




في الشكل المقابل أوجد ق($\hat{\text{س}}$) في $\Delta$س ص ع.

الحل:

ظاس $= \frac{٦}{٨} =$ ٠,٧٥ $\therefore$ ق($\hat{\text{س}}$) = ظا$^{-1}$ (٠,٧٥)

حيث ظا$^{-1}$ تعني النسب المثلثية العكسية للظل.

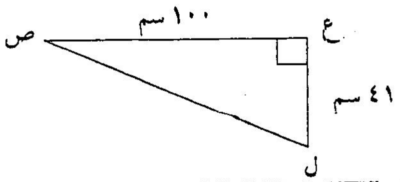
لإيجاد ق($\hat{\text{س}}$) تستخدم الآلة الحاسبة.

Shift | TAN | 0.75 | =

يظهر 36.86989765 يظهر ○’’’ 36° 52′ 11.63″

إذًا ق($\hat{\text{س}}$) $\simeq$ ١٢″ ٥٢′ ٣٦°.

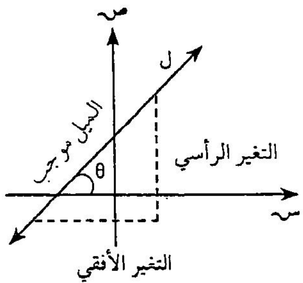
### حاول أن تحل ص ٧٧



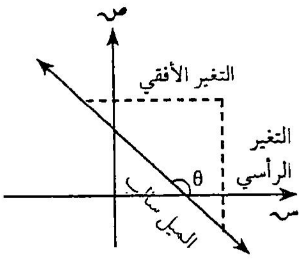

٣ أوجد ق($\hat{\text{س}}$) حيث ظاس = ٠,٥ ق(س) $\simeq$ ٢٦° ٣٤′ ٥٤,١٨″

٤ في الشكل المقابل، أوجد ق($\hat{\text{ل}}$) لأقرب درجة.

ظا ل = $\frac{١٠٠}{٤١}$ ق(ل) = ٦٨° تقريبًا



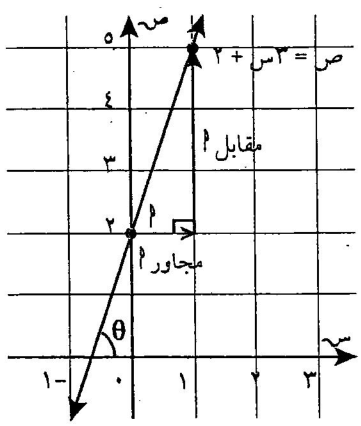

إذا كان المستقيم ل يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم ويكون ظاθ = ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$




إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.

## مثال (٥)

**في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التي يصنعها المستقيم ص = ٣س + ٢ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.**




الحل:

من الشكل ق($\hat{\theta}$) = ق($\hat{أ}$) . زاويتان متناظرتان.

ظاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٣}{١}$ = ٣ ق($\hat{أ}$) = ظا$^{-١}$ ٣

Shift TAN 3 =

يظهر 71.565051 °′″ يظهر 71° 33′ 54.18″

ق($\hat{أ}$) ≃ ٥٤″ ٣٣′ ٧١°

**حاول أن تحل**

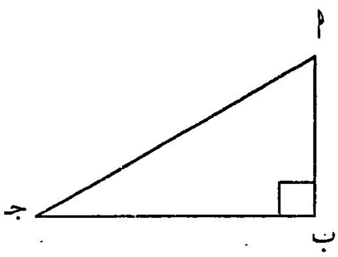
ظاθ = $\frac{١}{٤}$ ∴ θ = ٤٨ ٢ ١٤°

٥ احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

## ٢- مقلوب ظل الزاوية (ظتا): Cotangent (cot)

مقلوب ظل الزاوية أ = $\frac{١}{\text{ظاأ}}$ ويسمى ظل تمام الزاوية أ ويرمز إليه بالرمز ظتاأ وبالإنكليزية Cotangent (cot).

ظتاأ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$

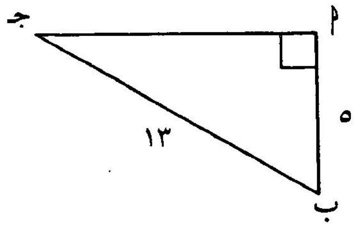



ويكون ظتاأ = $\frac{١}{\text{ظاأ}}$ : ظاأ ≠ ٠

ظاأ × ظتاأ = ١

ص ٧٩

## مثال (٦)




في الشكل المقابل أوجد ظاجـ، ظتاجـ.

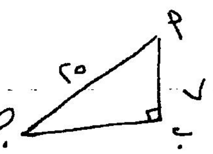
**الحل:**

من نظرية فيثاغورث $(\text{أجـ})^2 = (١٣)^2 - (٥)^2 = ١٤٤$،

أجـ = ١٢

$\text{ظاجـ} = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{٥}{١٢}$ ، $\text{ظتاجـ} = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \dfrac{١٢}{٥}$

**ملاحظة:**
عند عدم ذكر وحدة الطول في رسم الأشكال يمكنك اعتبار أي وحدة طول.




$(\text{ب جـ})^2 = ٢٥^2 - ٧^2 = ٥٧٦$

ب جـ = ٢٤ سم

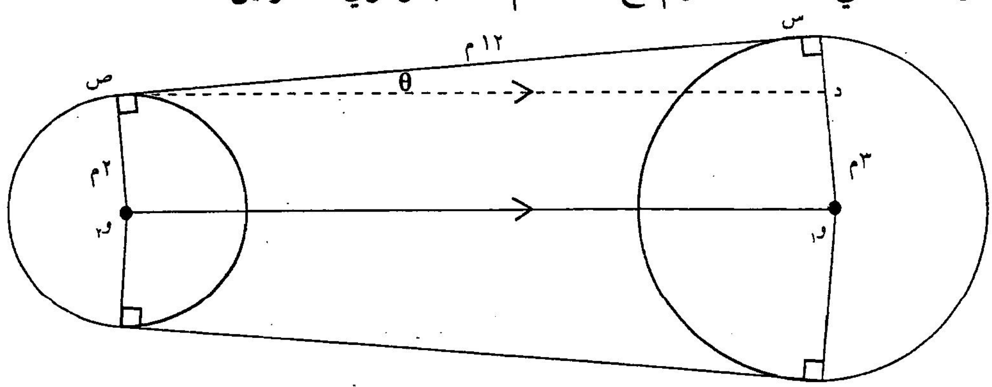
**حاول أن تحل** ص ٧٩

٦ أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٧ سم، أجـ = ٢٥ سم. أوجد: ظاجـ، ظتاجـ.

$\text{ظا جـ} = \dfrac{٧}{٢٤}$ ، $\text{ظتا جـ} = \dfrac{٢٤}{٧}$

## مثال (٧)

يلتف حزام حول بكرتين أسطوانتي الشكل. طول نصف قطر البكرة الكبرى ٣ م وطول نصف قطر الصغرى ٢ م.
نريد معرفة قياس الزاوية θ التي يصنعها الحزام مع المستقيم المار بمركزي الدائرتين.




**الحل:**

نرسم $\overline{\text{د ص}} \,/\!/\, \overline{و_1 و_2}$

الشكل $\text{د}و_1و_2\text{ص}$ مستطيل

$\text{س د} = \text{س }و_1 - \text{د }و_1 = ٣ - ٢ = ١ \text{ م}$

في المثلث د س ص قائم الزاوية:

$\text{ظا}\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{١}{١٢}$

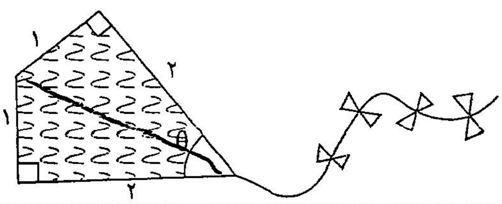
$\text{ق}(\theta) = \text{ظا}^{-1}\left(\dfrac{١}{١٢}\right) = \boxed{4^\circ 45' 49.11''}$

قياس الزاوية θ يساوي ″٤٥ ′٤٥ °٤ تقريبًا.

$\text{ظا}\theta = \dfrac{١}{٢}$ ∴ $\text{ظا}^{-1}\left(\dfrac{١}{٢}\right) = ٢٧^\circ$ تقريباً

ق θ = ٤٥° تقريباً

**حاول أن تحل** ص ٧٥




٧ بيّن الشكل المقابل طائرة ورقية. أوجد قياس الزاوية θ.

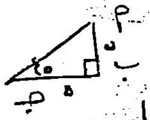
# الوحدة الثانية

# حساب المثلثات

## (( ملخص لأهم قوانين الوحدة الثانية ))

- العلاقة $\frac{\text{هـ}^{د}}{\pi} = \frac{\text{س}^{\circ}}{١٨٠}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية
- في المثلث القائم الزاوية جيب الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جا أو sin
- جيب تمام الزاوية = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جتا أو cos
- قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$ حيث جتا أ ≠ ٠ ، قتا أ = $\frac{١}{\text{جا أ}}$ جا أ ≠ ٠ .
- ظل الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$ ويرمز له ظا أو tan
- ظتا أ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الضلع المقابل}}$ .
- طول القوس ل = هـ$^{د}$ × نق
- مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ ج × جا أ
- مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{د}$ نق$^{٢}$ .
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق$^{٢}$ ( هـ$^{د}$ − جا هـ$^{د}$ ) .
- زاوية الارتفاع : إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي .
- زاوية الانخفاض : إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي .

ص ٨١




$\text{جا}\,٤٥ = \frac{\text{ب م}}{\text{م ج}} = \frac{٥}{\text{م ج}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

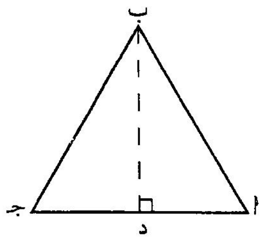
∴ الوتر = $٥\sqrt{٢}$ سم

## حاول أن تحل

١ (أ) أب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.

(ب) الحساب الذهني: إذا كان ظا جـ = ١ فكيف توجد ق ($\hat{\text{جـ}}$) دون استخدام الآلة الحاسبة؟

## المثلث ثلاثيني ستيني 30° – 60° triangle




أب جـ مثلث متطابق الأضلاع.

$\overline{\text{ب د}} \perp \overline{\text{أجـ}}$.

لما كان المثلث أب جـ متطابق الأضلاع، إذًا $\overline{\text{ب د}}$ هي منصف الزاوية أ$\hat{\text{ب}}$جـ.

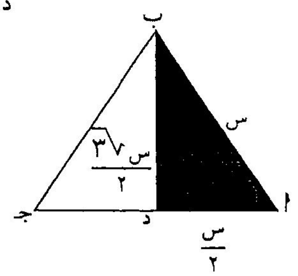
ومنه ق(أ$\hat{\text{ب}}$د) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°، ق($\hat{\text{أ}}$) = ٦٠°

يسمى هذا المثلث: مثلث ثلاثيني ستيني (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).

إذا كان طول الضلع أجـ يساوي س فإن أد = $\frac{\text{س}}{٢}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث أب د نحصل على ب د = $\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}$.

كذلك ب د هي المنصف العمودي للقطعة أجـ.




في هذا المثلث: جا$\hat{\text{أ}}$ = جا٦٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}} = \frac{\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا$\hat{\text{أ}}$ = جتا٦٠° = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} = \frac{١}{٢}$

ظا$\hat{\text{أ}}$ = ظا٦٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أد}} = \frac{\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{\text{س}}{٢}} = \sqrt{٣}$

جا٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا٦٠° = $\sqrt{٣}$

كذلك جا$\hat{\text{ب}}$ = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} = \frac{١}{٢}$

جتا$\hat{\text{ب}}$ = جتا٣٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}} = \frac{\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا$\hat{\text{ب}}$ = ظا٣٠° = $\frac{\frac{\text{س}}{٢}}{\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

لاحظ أن جا٦٠° = جتا٣٠°

جتا٦٠° = جا٣٠°

ص٨٢

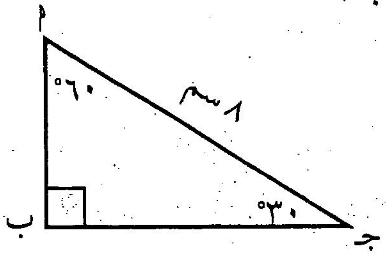
باستخدام الحاسبة يمكنك إيجاد كل من الجيب، جيب التمام والظل لكل زاوية ربعية. والجدول التالي يبيّن النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية.

| الزاوية هـ | | جاهـ | جتاهـ | ظاهـ |
|---|---|---|---|---|
| القياس الستيني | القياس الدائري | | | |
| °٠ | ٠ د | ٠ | ١ | ٠ |
| °٣٠ | $\frac{\pi}{٦}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ |
| °٤٥ | $\frac{\pi}{٤}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | ١ |
| °٦٠ | $\frac{\pi}{٣}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\sqrt{٣}$ |
| °٩٠ | $\frac{\pi}{٢}$ | ١ | ٠ | غير معرّف |
| °١٨٠ | $\pi$ | ٠ | ١- | ٠ |
| °٢٧٠ | $\frac{٣\pi}{٢}$ | ١- | ٠ | غير معرّف |
| °٣٦٠ | $٢\pi$ | ٠ | ١ | ٠ |

**هل تعلم؟**
وضعت جداول النسب المثلثية منذ أكثر من ٢٠٠٠ عام لتستخدم في علم الفلك.

**مثال (٢)**

**أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$.**




**الحل:**

في $\Delta$ أ ب جـ، جاجـ = جا°٣٠ = $\frac{أب}{أجـ}$

$\frac{١}{٢} = \frac{أب}{٨}$

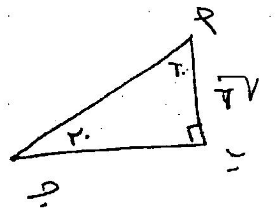
أب = ٤

جتاجـ = جتا(°٣٠) = $\frac{ب جـ}{أجـ}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{ب جـ}{٨}$

ب جـ = $٤\sqrt{٣}$

طول الضلع $\overline{أب}$ = ٤ سم وطول الضلع $\overline{ب جـ}$ = $٤\sqrt{٣} \simeq ٦,٩$ سم.




جا٦٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{أجـ} = \frac{١}{٢}$

أجـ = $٢\sqrt{٦}$

ظا٣٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{بجـ} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

بجـ = $٢\sqrt{٦}$

**حاول أن تحل** ص٨٢

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$ سم، فأوجد طول الضلعين الباقيين.

٨٣

## مثال (٣) تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.

الحل:

طول العمود النازل من رأس مثلث متطابق الأضلاع إلى القاعدة = طول الضلع × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (أي ارتفاع المثلث)

= ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ٥٢ سم.

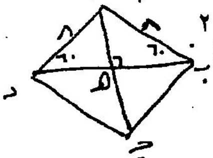
مساحة اللوحة = $\frac{\text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{٢}$ = $\frac{٦٠ \times ٥٢}{٢}$ = ١٥٦٠ سم$^{٢}$.

مساحة اللوحة تساوي حوالى ١٥٦٠ سم$^{٢}$.

جا ٦٠ = $\frac{\text{هـ م}}{٨}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هـ م = $\frac{٨ \times \sqrt{٣}}{٢}$ = ٤$\sqrt{٣}$ سم

ءجـ = ٨$\sqrt{٣}$ سم

م = $\frac{١}{٢}$ ق١ × ق٢ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٨$\sqrt{٣}$ = ٣٢$\sqrt{٣}$ سم$^{٢}$

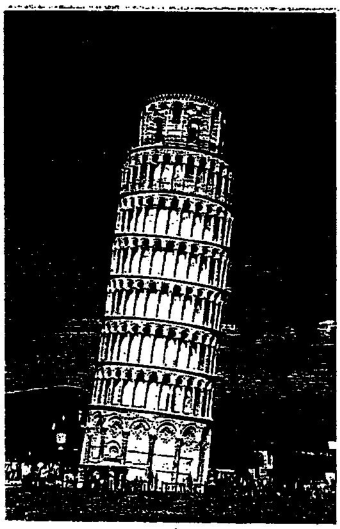


### حاول أن تحل ٨٣

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.

٨٢

## مثال (٤) تطبيقات حياتية



برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. ($\overline{\text{أد}}$ في الرسم).

شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، جـ قمة البرج بزاويتين قياساهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب.

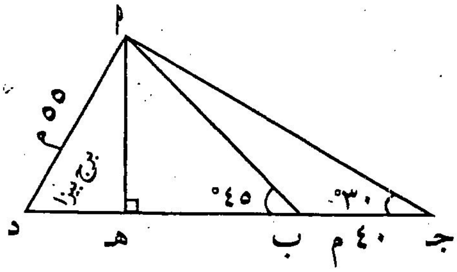
**أ** عبّر عن طول كل من $\overline{\text{هـ ب}}$، $\overline{\text{هـ جـ}}$ بدلالة طول $\overline{\text{أهـ}}$.

**ب** أوجد أهـ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، جـ تساوي ٤٠ مترًا.

**جـ** نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ - ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٤,٥ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس ($\hat{\text{أدهـ}}$) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

الحل: **أ** في المثلث أهـ ب: ظا ٤٥° = $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ب}}$ = ١ ومنه هـ ب = هـ أ

في المثلث أهـ جـ: ظا ٣٠° = $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ جـ}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه هـ جـ = $\sqrt{٣}$ هـ أ



**ب** هـ جـ = هـ ب + ب جـ

$\sqrt{٣}$ أهـ = هـ أ + ٤٠ أي ($\sqrt{٣}$ - ١) أهـ = ٤٠

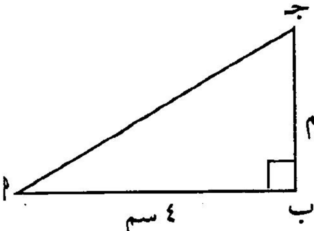
أهـ = $\frac{٤٠}{\sqrt{٣} - ١}$ ≃ ٥٤,٦٤

**جـ** قبل الأشغال: جتا($\hat{\text{أدهـ}}$) = $\frac{٤,٥}{٥٥}$ ، ق($\hat{\text{أدجـ}}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤,٥}{٥٥}\right)$ ≃ ٨٤° ٢١′ ٥٦″

بعد الأشغال: جتا($\hat{\text{أدهـ}}$) = $\frac{٤}{٥٥}$ ، ق($\hat{\text{أدجـ}}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤}{٥٥}\right)$ ≃ ٨٥° ٤٩′ ٤٦″

# حل المثلث القائم الزاوية

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$




استخدم حاسبة الجيب لإيجاد ق($\hat{أ}$).

Shift | TAN | 0.75 | = | 36.869897

ق($\hat{أ}$) ≃ ٣٧°. ق($\hat{جـ}$) ≃ ٩٠° - ٣٧° ≃ ٥٣°

**حاول أن تحل** ص٨٥

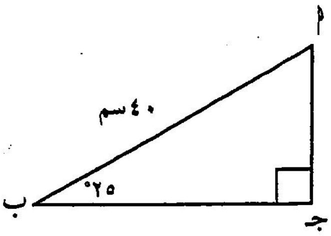

أب² = ١٢² + ١٥²
أب = ١٩,٢
ظا ب = $\frac{١٢}{١٥}$
ب ≃ ٢٩°
ق($\hat{أ}$) = ٩٠° - ٢٩° = ٥١°

① حل المثلث أب جـ القائم الزاوية في $\hat{جـ}$ حيث: ب جـ = ١٥ سم، أجـ = ١٢ سم

## مثال (٢)

حلّ المثلث أب جـ القائم في ($\hat{جـ}$) إذا علم أن: أب = ٤٠ سم، ق($\hat{ب}$) = ٢٥°

الحل:




ق($\hat{أ}$) = ٩٠° - ٢٥° = ٦٥°

جتا($\hat{ب}$) = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أب}}$ ، جتا (٢٥°) = $\frac{\text{ب جـ}}{٤٠}$

ب جـ = ٤٠ × جتا(٢٥°) ≃ ٣٦,٢٥ سم

جاب = $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}$ ، جا (٢٥°) = $\frac{\text{أجـ}}{٤٠}$

أجـ = ٤٠ جا (٢٥°) ≃ ١٧ سم

**حاول أن تحل** ص٨٥

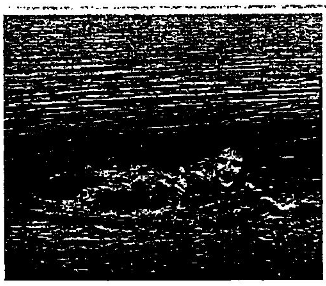

ق($\hat{أ}$) = ٩٠ - ٧٥
= ١٥°

ظا ٧٥ = $\frac{٢٠}{\text{ب جـ}}$
ب جـ = ٥,٤

جا ٧٥ = $\frac{٢٠}{\text{أب}}$
أب = ٢٠,٧

② حل المثلث أب جـ القائم في جـ حيث: أجـ = ٢٠ سم، ق($\hat{ب}$) = ٧٥°

## مثال (٣)

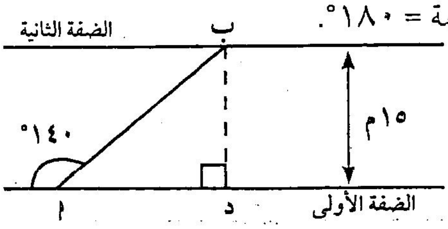


حاول أحد السباحين عبور النهر انطلاقًا من النقطة أ الموضحة بالشكل المرسوم جرفه التيار ووصل إلى النقطة ب.

ما المسافة التي قطعها السباح؟

الحل: ليكن ب د البعد العمودي بيّن الضفتين

في المثلث أب د، ق(د$\hat{أ}$ب) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠° قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠°.




جا(أ) = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}}$ جا(٤٠°) = $\frac{١٥}{\text{أب}}$ بالتعويض

ص ٨٦

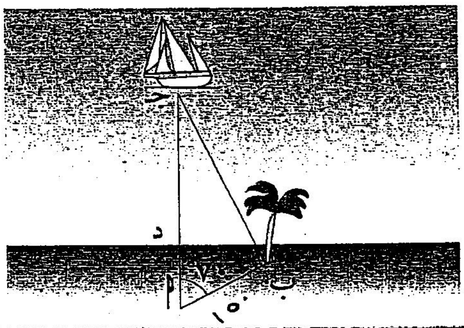
أب = $\frac{١٥}{جا(٤٠°)}$ ≃ ٢٣,٣ أي أن السباح قطع حوالى ٢٣,٣ مترًا.

**حاول أن تحل**

③ في الشكل المقابل إذا كان، أد = ١٠٠ متر، أب = ١٥٠ متر.

أوجد:

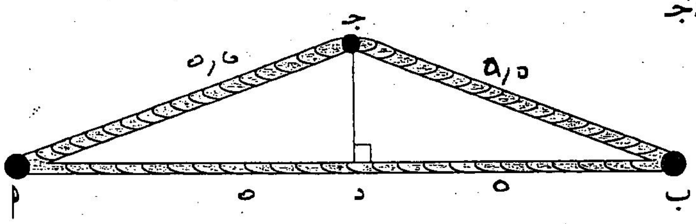
(أ) البعد بين الزورق والشجرة (ب) البعد بين الزورق والشاطىء




ظا ٧٠° = $\frac{ب جـ}{١٥٠}$ ب جـ ≃ ٤١٢ متر | جتا ٧٠ = $\frac{١٥٠}{أ جـ}$ أ جـ = ٤٣٨,٥ متر | البعد بين الزورق والشاطئ = ٤٣٨,٥ - ١٠٠ = ٣٣٨,٥ م

**مثال (٤)**

حبل طوله ١٠ أمتار مثبت في مسمارين عند النقطتين أ، ب. حبل آخر طوله ١١ مترًا مثبت في نفس النقطتين، شُدّ من وسطه (النقطة جـ) إلى أعلى.




Ⓐ أوجد ق(د أ جـ) Ⓑ أوجد طول $\overline{دجـ}$

الحل:

أد = $\frac{أب}{٢}$ = ٥ أمتار.

أد = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ أمتار.

جتاأ = $\frac{أد}{أجـ}$ = $\frac{٥}{٥,٥}$ ≃ ٠,٩١

∴ ق(أ) ≃ جتا$^{-١}$ (٠,٩١)

ق(د أ جـ) ≃ ٢٤° ٢٩′ ٤١″ باستخدام الحاسبة

Ⓑ باستخدام نظرية فيثاغورث (جـ د)$^{٢}$ + (أد)$^{٢}$ = (جـأ)$^{٢}$

أي (جـ د)$^{٢}$ = (جـأ)$^{٢}$ − (أد)$^{٢}$

(جـ د)$^{٢}$ = ٥,٥$^{٢}$ − ٥$^{٢}$ = ٥,٢٥

∴ جـ د = $\sqrt{٥,٢٥}$ ≃ ٢,٣

طول القطعة $\overline{جـ د}$ يساوي حوالي ٢,٣ متر.

**حاول أن تحل** ص ٨٦

④ في المثال السابق أوجد (أ) إذا كان طول الحبل من أ إلى ب والمار بالنقطة جـ يساوي ١٢ مترًا.

جا أ = $\frac{٥}{٦}$ ق(أ) = ٥٦° ٣٣ ٣٣

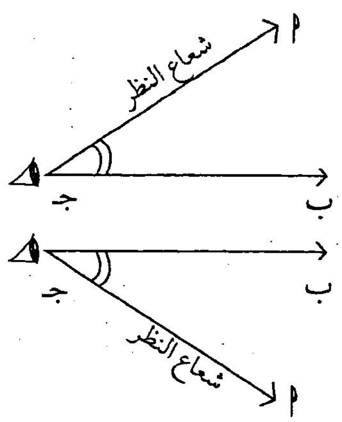
ص ٨٧

# زوايا الارتفاع والانخفاض
# Angles of Elevation and Depression

**سوف تتعلم**

- زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
- استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية

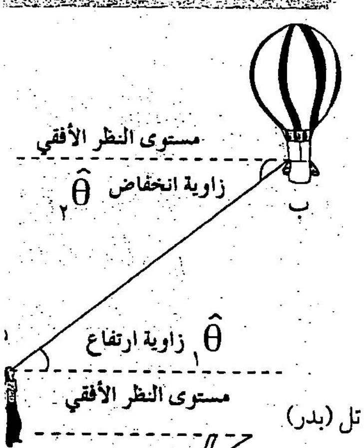
**دعنا نفكر ونتناقش**




١ - إذا رصد شخص (جـ) نقطة ﻫ أعلى من مستوى نظره الأفقيّ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{\text{جـ ﻫ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ تسمى زاوية ارتفاع ﻫ عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

٢ - وإذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ تسمّى زاوية انخفاض د عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

**ملاحظة:**



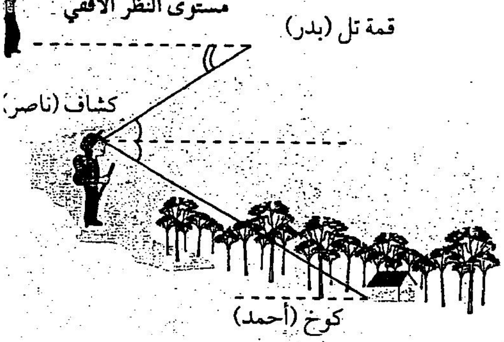

إذا كان ﻫ شخصًا موجودًا على سطح الأرض، وكان ب شخصًا موجودًا في منطاد مرتفع عن سطح الأرض، ونظر كلّ منهما إلى الآخر فإنّ:

$\hat{\theta}_1$ هي زاوية ارتفاع ب عن المستوى الأفقيّ لنظر (ﻫ).

$\hat{\theta}_2$ هي زاوية انخفاض (ﻫ) عن المستوى الأفقيّ لنظر (ب)

ونلاحظ في هذه الحالة أنّ:

زاوية الارتفاع ($\hat{\theta}_1$) = زاوية الانخفاض ($\hat{\theta}_2$).




٣ - يقف بدر عند قمة التل ويقف ناصر عند الكشاف ويقف أحمد عند الكوخ.

صف كلّ زاوية في الشكل عندما ينظر:

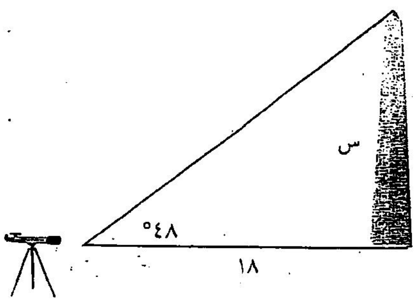
(أ) بدر إلى ناصر

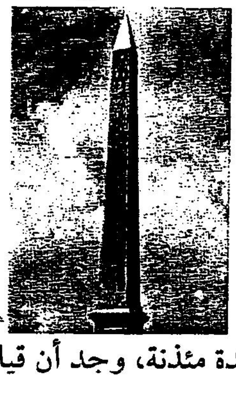
(ب) ناصر إلى أحمد

(جـ) ناصر إلى بدر

## مثال (١)

**لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أنّ قياس زاوية الارتفا ٤٨°. إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.**



**الحل:**

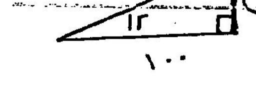
$$\text{ظا}(٤٨)° = \frac{\text{س}}{١٨}$$

$\text{س} = ١٨ \times \text{ظا}(٤٨)° \simeq ٢٠$

ارتفاع المسلة: ٢٠ م تقريبًا

**حاول أن تحل** ص ٨٧

(١) من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٢°. أوجد ارتف المئذنة عن سطح الأرض.




ظا ١٢° = ع / ١٠٠

ارتفاع المئذنة = ١٠٠ × ظا ١٢ = ٢١,٣ م



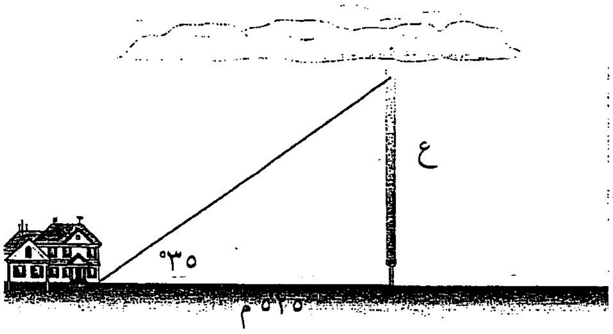
- ٦١ -

ص ٨٨

## مثال (٢)

علم الأرصاد الجوية: لمعرفة ارتفاع طبقة من الغيوم عن سطح الأرض يستخدم علماء الفلك قياس زاوية الارتفاع في اللحظة التي يصل فيها البرق إلى الأرض. (يمكن نمذجة المسألة كما في الصورة).

أوجد قيمة تقريبية لارتفاع طبقة الغيوم عن سطح الأرض.




الحل:

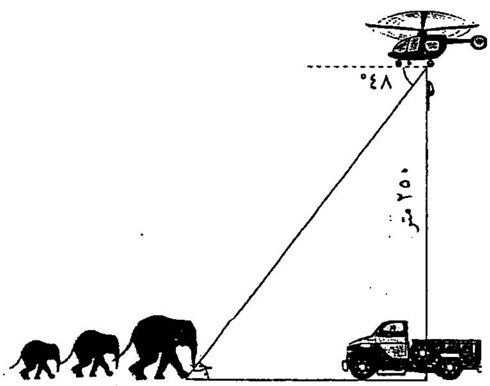
ظا (٣٥°) = $\frac{\text{ع}}{٥٢٥}$

ع = ٥٢٥ × ظا (٣٥°)

ع ≃ ٣٦٧,٦ مترًا

## مثال (٣)

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطيعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨°. ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟




الحل:

لتكن أ موقع المروحية، ب موقع السيارة، جـ موقع القطيع.

جاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

جا٤٨° = $\frac{٢٥٠}{\text{أجـ}}$

أجـ = $\frac{٢٥٠}{\text{جا٤٨°}}$ ≃ ٢٢٥

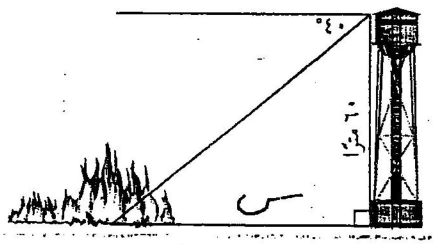
أجـ ≃ ٣٣٦,٤ مترًا

يبعد قطيع الفيلة حوالى ٣٣٦ مترًا عن المروحية.

## حاول أن تحل

ص ٨٨

٣) يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٤٠°. ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟




ظا٤٠° = $\frac{٦٠}{\text{س}}$

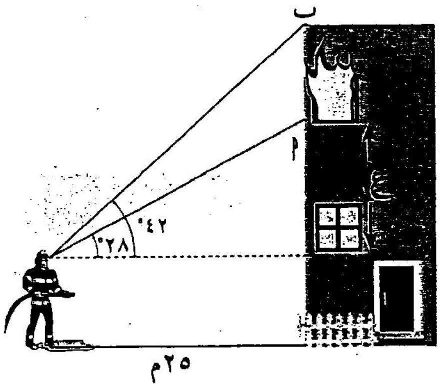
المسافة = ٧١,٥ متر تقريبًا

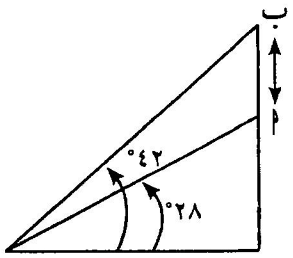
م ٢٩

## مثال (٤)

شاهد رجل إطفاء وهو يقف على سطح الأرض ألسنة النيران تنبعث من إحدى النوافذ القريبة من سطح البناء. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى القاعدة السفلية للنافذة (أ) حيث تندلع النيران هي ٢٨°، وزاوية الارتفاع من مستوى نظر إلى سطح البناء (ب) قياسها ٤٢°. علمًا أن رجل إطفاء يقف على مسافة ٢٥ مترًا من قاعدة البناء.

ما المسافة بين قاعدة النافذة (حيث ألسنة النيران) وسطح البناء؟




الحل: بفرض أن $ع_١$ هي البعد بين القاعدة السفلية للنافذة أ ومستوى النظر الأفقي.

ظا٢٨° = $\frac{ع_١}{٢٥}$ ؛ $ع_١$ = ٢٥ ظا٢٨°.

بفرض أن $ع_٢$ هي البعد بين سطح البناء والمستوى الأفقي للنظر.

ظا٤٢° = $\frac{ع_٢}{٢٥}$ ؛ $ع_٢$ = ٢٥ ظا٤٢°

ع = $ع_٢$ − $ع_١$ = ٢٥(ظا ٤٢° − ظا ٢٨°)

≃ ٩,٢٢ أمتار

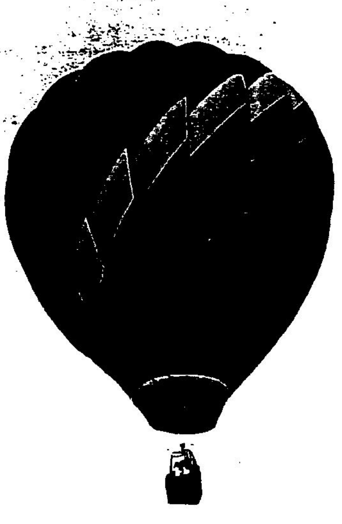
∴ المسافة المطلوبة ≃ ٩,٢٢ أمتار

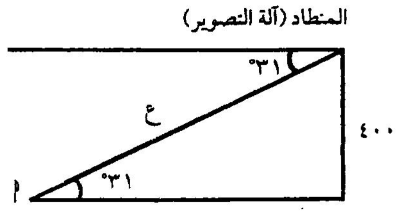
## حاول أن تحل

م ٢٩

④ زُوِّد منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب عند النقطة أ بزاوية انخفاض ٣١°. يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ متر.

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟






ظا ٣١° = $\frac{٤٠٠}{ع}$

ع = ٦٦٦ متر تقريباً.

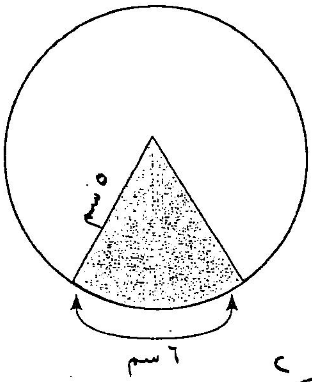
م ٢ - ٧

القطاع الدائري والقطعة الدائرية

ص ٨١

**مثال (١)**

**أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:**




**الحل:**

**مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٥**

**= ١٥ سم$^2$**

**مساحة القطاع الدائري تساوي ١٥ سم$^2$**

**حاول أن تحل** مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ١٠ = ٢٠ سم$^2$

**(١) أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.**

تعرّفت في بداية الوحدة الثانية أن طول القوس ل يساوي قياس الزاوية المركزية بالراديان مضروبًا في طول نصف القطر:

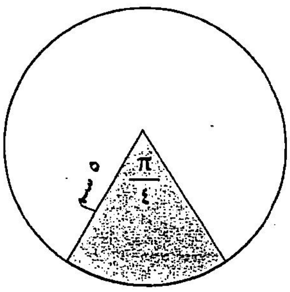
ل = هـ$^د$ × نق

إذا عوّضنا عن ل بـ هـ$^د$ × نق نحصل على:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ هـ$^د$ × نق × نق = $\frac{1}{2}$ هـ$^د$ نق$^2$

**مثال (٢)**

**أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:**




**الحل:**

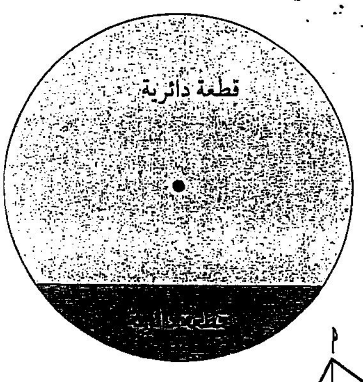
**مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ هـ$^د$ نق$^2$ = $\frac{1}{2}$ × $\frac{\pi}{4}$ × $(5)^2$**

**= $\frac{25\pi}{8}$ ≃ ٩,٨ سم$^2$**

**مساحة القطاع الدائري تساوي حوالى ٩,٨ سم$^2$**

## ٢- القطعة الدائرية: Circular Segment

القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

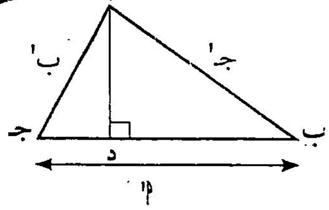



## ٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle

مساحة المثلث أب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × أد

لكن جاب = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ ∴ أد = أب × جاب

مساحة المثلث أب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × بأ × جاب.




-٦٤-

$$\text{مساحة المثلث أ ب جـ} = \frac{١}{٢} \text{ ب جـ} \times \text{ب أ} \times \text{جا ب}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{ ب جـ} \times \text{أ جـ} \times \text{جا جـ}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{ أ ب} \times \text{أ جـ} \times \text{جا أ}$$

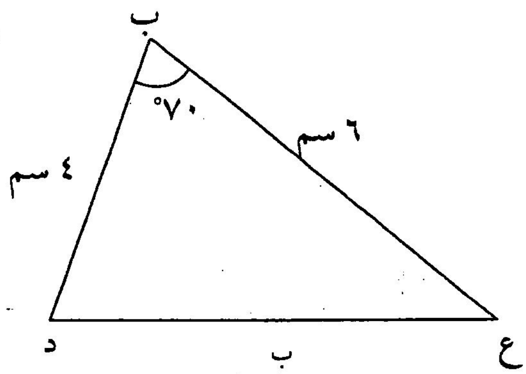
أي أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

وباختصار نكتب مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ' جـ' جا ب

$$= \frac{١}{٢} \text{ أ' ب'} \times \text{جا جـ}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{ ب' جـ' جا أ}$$

**مثال (٣)**




ب ع د حيث ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق(ب̂) = ٧٠°

أوجد مساحة هذا المثلث.

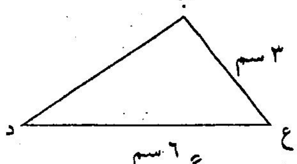
الحل:

مساحة المثلث ب ع د = $\frac{١}{٢}$ ب ع × ب د × جا(ب̂)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ × جا(٧٠°) ≃ ١١,٢٧٦

مساحة المثلث ب ع د هي حوالى ١١,٢٧٦ سم$^{٢}$.

**حاول أن تحل** م = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٦ × جاع ∴ ٧ = ٩ جاع

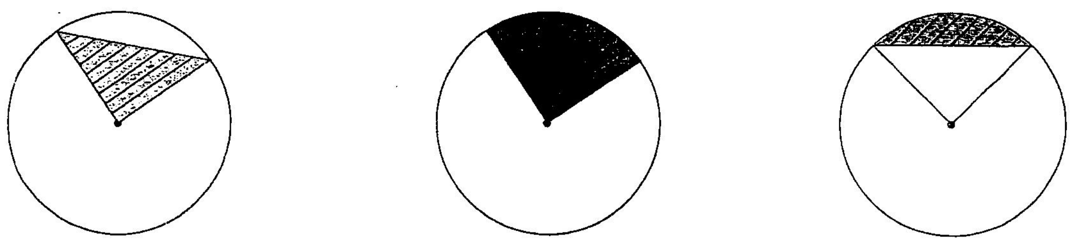



(٢) في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم$^{٢}$. فأوجد ق(ع̂).

م(ع) ≃ ٥١° تقريباً

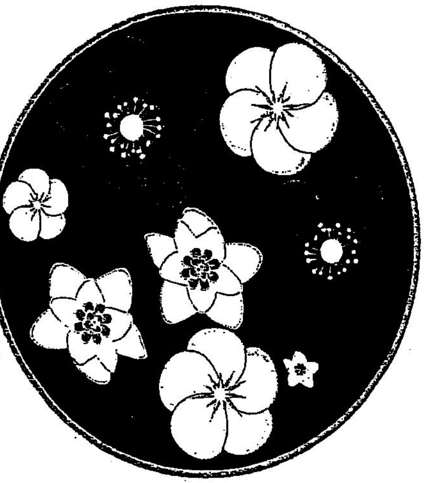
## ٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.

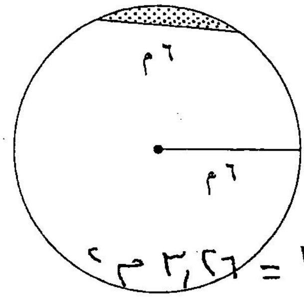


مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري - مساحة المثلث

## حاول أن تحل



③ (أ) حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.




مثلث متطابق الأضلاع

الزاوية المركزية = ٦٠°

هـ = ٦٠ × $\frac{١١}{١٨٠}$ ≈ ١,٠٤٧٢

مساحة القطعة الدائرية

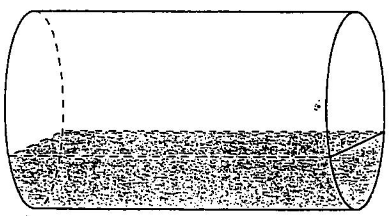
= $\frac{1}{2}$ نق² [هـ - جا هـ]

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦ [١,٠٤٧٢ - جا ٦٠] = ٣,٢٦ م²

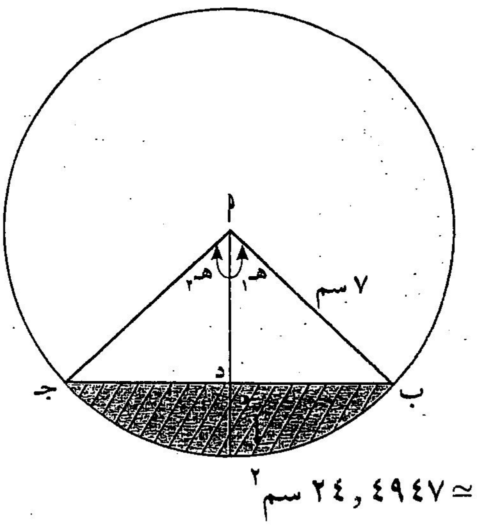
(ب) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°. هـ = ٧٠ × $\frac{١١}{١٨٠}$ = ١,٢٢١٧

م = $\frac{1}{2}$ نق² [هـ - جا هـ] = $\frac{1}{2}$ × ١٠٠ [١,٢٢١٧ - جا ٧٠°] = ١٤,١ سم²

## مثال (٥)



يبيّن الشكل المقابل مقطعًا في أنبوب أسطواني الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع.
إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم،
فأوجد مساحة الجزء المظلل باللون الوردي.




الحل: أد = ٥ سم

هـ١ = جتا⁻¹ $\left(\frac{٥}{٧}\right)$ ≈ ٠,٧٧٥ ء = هـ٢

هـ = هـ١ + هـ٢ ≈ ١,٥٥ ء

مساحة القطاع الأصغر = $\frac{1}{2}$ × هـ ء × نق²

= $\frac{1}{2}$ × ١,٥٥ × ٧² ≈ ٣٧,٩٧٥ سم²

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × أجـ × أب × جا(١,٥٥ ء) ≈ $\frac{1}{2}$ × ٤٩ × جا (١,٥٥ ء) ≈ ٢٤,٤٩٤٧ سم²

مساحة الجزء المظلل = ٣٧,٩٧٥ - ٢٤,٤٩٤٧ ≈ ١٣,٤٨ سم²

# الوحدة الثالثة

# الجبر - التغير

## ((ملخص لأهم قوانين الوحدة الثالثة))

- يوجد في شكلين متشابهين أزواج من الزوايا متساوية القياس وأزواج من الأضلاع متناسبة الأطوال.
- عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر يكون المثلثان متشابهان.
- عند تطابق زاوية في مثلث مع زاوية في مثلث آخر وتناسب طولي الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين. يكون المثلثان متشابهان
- عند تناسب أطوال الأضلاع الثلاثة المتناظرة في مثلثين. يكون المثلثان متشابهين
- يقسم العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر المثلث القائم الزاوية إلى مثلثين متشابهين وكلا منهما مشابه للمثلث الأصلي.
- نظرية طاليس:

اذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع بعضها بعضاً. فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

- عندما يوازي مستقيم أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.
- يقسم المنصف للزاوية الداخلية في المثلث الضلع المقابل لها إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.
- اذا كانت نسبة التشابه بين مضلعين متشابهين هي $\frac{م}{ب}$ فإن:

① النسبة بين محيطي مضلعين $= \frac{م}{ب}$.

② النسبة بين مساحتي مضلعين $= \left(\frac{م}{ب}\right)^2$

- نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

# النسبة والتناسب
# Ratio and Proportion

ص ١٠٠

**دعنا نفكر ونتناقش**

تعلم أن النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر.
فمثلًا: النسبة بين العدد ٣ (الحد الأول)، والعدد ٤ (الحد الثاني) هي $\frac{٣}{٤}$ ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة ٣:٤ وتُقرأ ٣ إلى ٤.

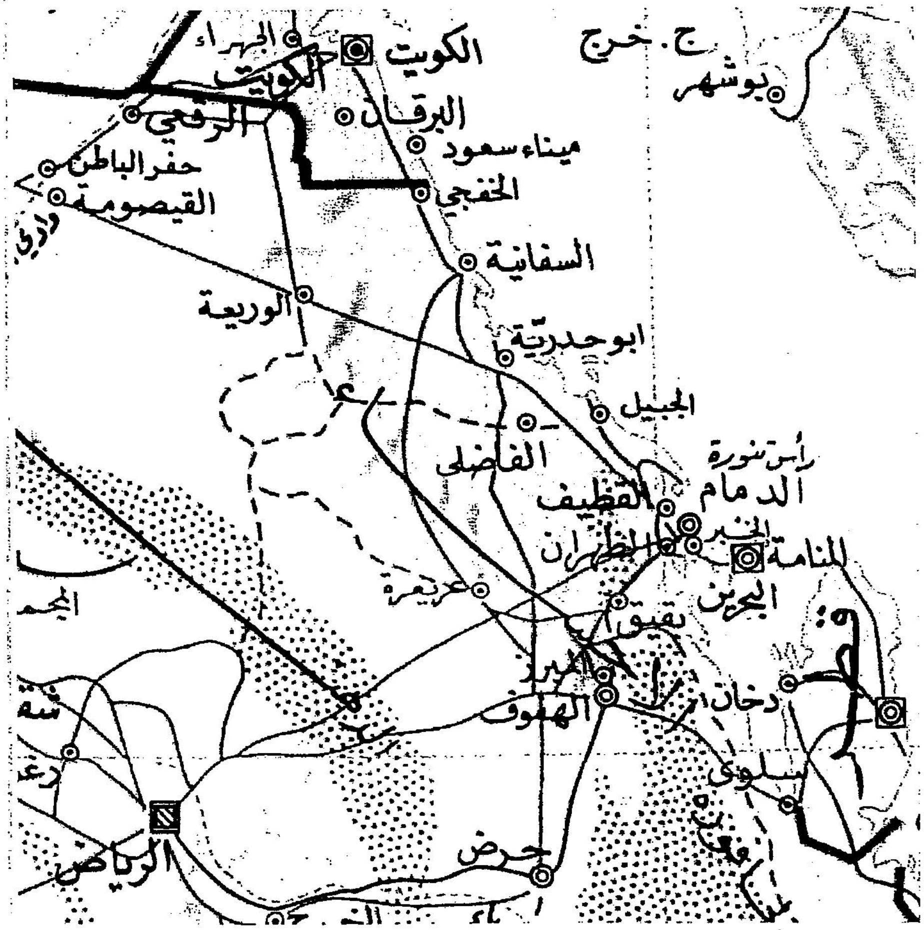
**سوف تتعلم**

- خواص التناسب
- تمارين وتطبيقات هندسيّة
- خواص التناسب المتسلسل

**مثال (١)**

**تذكر:**
١ كم = ١٠٠ ٠٠٠ سم

إذا كانت المسافة بين الكويت العاصمة والرياض هي ٥٥٠ كم، وكانت هذه المسافة ممثّلةً في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها ١١ سم. أوجد مقياس الرسم، ثم أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقيّة.




الحلّ:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$$

$$= \frac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥٠ كم}} = \frac{\text{١١ سم}}{\text{٥٥ ٠٠٠ ٠٠٠ سم}}$$

حيث إن الكميتين من النوع نفسه يمكن كتابتها كنسبة بالصورة:

$\frac{١١}{٥٥ ٠٠٠ ٠٠٠}$ أو ١١ : ٥٥ ٠٠٠ ٠٠٠

أي النسبة تساوي ١ : ٥ ٠٠٠ ٠٠٠

**حاول أن تحل** ص ١٠٠

(١) من مثال (١) استخدم مقياس الرسم على الخريطة لإيجاد المسافة الحقيقيّة بين الدمام والكويت العاصمة.

مقياس الرسم = $\frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$

$\frac{١}{٥ ٠٠٠ ٠٠٠} = \frac{٨}{س}$

المسافة الحقيقية = ٤٠ ٠٠٠ ٠٠٠ سم = ٤٠٠ كم

$$س = \frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠$$

$$س = \frac{١٣٢,٥}{٢٦٥٠} \times ١٠٠$$

$$س = ٥$$

∴ النسبة المئوية للزيادة هي ٥، أي أن الزيادة تساوي ٥٪ من الإنتاج عن العام السابق.

**حاول أن تحل**

② في العام ٢٠١٠، كان إنتاج المزرعة نفسها ٥٥٠٠ طنًّا من البطاطا أما في العام ٢٠١١ فكان الإنتاج ٦٣٥٠ طنًّا.

احسب النسبة المئوية لزيادة منتج البطاطا بين عامي ٢٠١٠، ٢٠١١ إلى أقرب جزء من مئة.

قيمة الزيادة = ٦٣٥٠ - ٥٥٠٠ = ٨٥٠ طن

النسبة المئوية للزيادة = $\frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠$

$= \frac{٨٥٠}{٥٥٠٠} \times ١٠٠ = ١٥,٤٥$ ٪

## التناسب Proportion

**التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.**

فمثلًا: $\frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٥}{٢٠} = \dots$

ويمكن كتابة ذلك كالآتي: ٣:٤ = ١٢:١٦ = ١٥:٢٠...

وتقرأ ٣ إلى ٤ هي نفسها ١٢ إلى ١٦ هي نفسها ١٥ إلى ٢٠...

**خاصيّة التساوي:**

ليكن أ، ب، جـ، د، ∈ ح*، ك ∈ ح.

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنّ $\frac{أ}{ب} \times ك = \frac{جـ}{د} \times ك$ ، $ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{جـ}{د}$

ص ١٠١

فمثلًا:

نعلم أن $\frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٢٠}$ بضرب الطرفين في ٢ نجد أن:

$\frac{٣}{٤} \times ٢ = \frac{١٥}{٢٠} \times ٢$ أي أن $\frac{٣}{٢} = \frac{١٥}{١٠}$

**تذكر:**
ح* هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية
ح* = ح - {٠}
الرمز ∋ يقرأ ينتمي إلى

## مثال (٣)

إذا كان $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$ فأوجد قيمة أ.

الحل: $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$

$١٨ \times \frac{أ}{٩} = ١٨ \times \frac{٥}{٦}$ بضرب الطرفين في ١٨ (م.م ا للعددين ٦، ٩)

$٢أ = ١٥$ بالتبسيط

$أ = \frac{١٥}{٢}$ بقسمة الطرفين على ٢

$أ = ٧,٥$

ص ١٠١

### حاول أن تحل

٣ إذا كان $\frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩}$ فأوجد قيمة ص.

ضرب الطرفين × ١٨

$١٨ \times \frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩} \times ١٨$

$١٢ = ٢ص$ ص = ٦

### خاصيّة الضرب التقاطعي: ص ١٠٢

ليكن ا، ب، جـ، د ∋ ح*

إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن ا د = ب جـ

$\frac{ا}{ب} \times \frac{جـ}{د}$

فمثلًا: $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$ من ذلك نجد أن:

$١٢ \times ٤ = ١٦ \times ٣$

$٤٨ = ٤٨$ عبارة صحيحة

**مثال (٤)** ص ١٠٢

أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{ص}{٢,٥} = -\frac{٣}{٤}$

الحل:

ص × ٤ = -٣ × ٢,٥ ضرب تقاطعي

٤ص = -٧,٥

ص = $-\frac{٧,٥}{٤}$ بقسمة الطرفين على ٤

ص = -١,٨٧٥

**حاول أن تحل** ص ١٠٢

٣ أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٢}{ب} = \frac{٨}{٢٠}$

٢ × ٢٠ = ٨ × ب

ب = $\frac{٢ \times ٢٠}{٨}$ = ٥

**تعريف:**

ليكن ا، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن ا، ب، جـ، د **أعداد متناسبة.**

وإذا كانت ا، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{ا}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى ا، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب.**

ولأنّ في هذه الحالة اد = ب جـ خاصيّة الضرب التقاطعي

فإنّ: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

**مثال (٥)** ص ١٠٢

أثبت أن ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعداد متناسبة.

الحل:

تكون الاعداد ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعدادًا متناسبة عندما تتساوى النسبتان $\frac{٤}{١,٥}$ ، $\frac{٨}{٣}$

وحيث أن $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٤٠}{١٥} = \frac{٨}{٣}$

أي أن $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٨}{٣}$

∴ الأعداد متناسبة.

$\frac{٣,٤}{٧}$ ، $\frac{٢,٠٤}{٤,٢}$

٤,٢ × ٣,٤ = ١٤,٢٨

٢,٠٤ × ٧ = ١٤,٢٨

**حاول أن تحل** ص ١٠٢

٤ أثبت أن ٣,٤ ، ٧ ، ٢,٠٤ ، ٤,٢ أعداد متناسبة.

الأعداد متناسبة

$\frac{٣,٤}{٧} = \frac{٢,٠٤}{٤,٢}$

ص ١٠٤

## مثال (٦)

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد ٢، ٥، ٧. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ + ٣ب}{٢ب + جـ}$.

الحل:

**معلومة رياضية:**
إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد د، هـ، و، فإن: $\frac{أ}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{جـ}{و}$.

∵ أ، ب، جـ متناسبة مع ٢، ٥، ٧

∴ $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{جـ}{٧} = م$

∴ أ = ٢م، ب = ٥م، جـ = ٧م

∴ المقدار $\frac{أ+٣ب}{٢ب + جـ} = \frac{٢م + ٣(٥م)}{٢(٥م) + ٧م} = \frac{١٧م}{١٧م} = ١$

### حاول أن تحل

$\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥} = \frac{جـ}{١١} = م$ أ = ٣م ب = ٥م جـ = ١١م

المقدار = $\frac{٣م + ١٥م}{٢٥م + ١١م} = \frac{١٨م}{٣٦م} = \frac{١}{٢}$

⑤ إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ متناسبة مع ٣، ٥، ١١. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ+٣ب}{٥ب + جـ}$.

ص ١٠٥

## مثال (٧)

ص ١٠٤

تشارك سالم ومنصور بتنفيذ أعمال الدهان. إن نسبة الزمن الذي أمضياه في العمل هي ٧:٤. قبضا معًا ٨٨ دينارًا. كيف سيتوزع هذا المبلغ بينهما إذا عمل سالم فترة زمنية أطول من منصور؟

الحل: لتكن س نصيب سالم، م نصيب منصور من المبلغ.

$\frac{س}{م} = \frac{٧}{٤}$ كتابة التناسب

$\frac{س + م}{م} = \frac{٧ + ٤}{٤}$ من خواص التناسب

$\frac{٨٨}{م} = \frac{١١}{٤}$

$م = \frac{٤ \times ٨٨}{١١} = ٣٢$

س = ٨٨ − ٣٢ = ٥٦

ينال سالم ٥٦ دينارًا، وينال منصور ٣٢ دينارًا.

### حاول أن تحل

ص ١٠٥

⑥ في مثال (٧)، كيف سيتوزع المبلغ بين سالم ومنصور إذا كانت نسبة الزمن ٣:٥، إذا عمل منصور فترة زمنية أطول من سالم؟

$\frac{س}{م} = \frac{٣}{٥}$ $\frac{م+س}{س} = \frac{٨}{٣}$ $\frac{٨٨}{س} = \frac{٨}{٣}$ ينال سالم ١١ دينار / ومنصور / ٧٧ دينار



-٩٦-

ص ١٠٥

**مثال (٨)** **تطبيقات حياتية**

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سعرات حراريّة تتناسب تقريبًا مع وزنه.

والجدول المجاور يبيّن ذلك لشخص وزنه ٦٥ كجم، عند قيامه بالنشاطات المذكورة لمدة ٦٠ دقيقة.

قام هذا الشخص بأحد هذه الأنشطة لمدة ٨٠ دقيقة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحراريّة التي يفقدها (بالتقريب).

| النشاط لمدة ٦٠ دقيقة | السعرات المحروقة |
|---|---|
| المشي بسرعة ٤,٥ كم/ساعة | ٣٠٠ |
| السباحة أو التزلج | ٥٠٠ |
| لعب كرة قدم | ٤٠٠ |

الحلّ: بفرض أن س عدد السعرات الحرارية التي يفقدها في كل نشاط

عند المشي ٦٠ دقيقة يحرق ٣٠٠ سعرة حرارية

عند المشي ٨٠ دقيقة يحرق س سعرة حرارية

أي أن $\frac{س}{٣٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$

$٦٠س = ٣٠٠ \times ٨٠$ باستخدام الضرب التقاطعي

$س = \frac{٣٠٠ \times ٨٠}{٦٠}$

س = ٤٠٠ سعرة حرارية تقريبًا

وبالمثل السباحة: $\frac{س}{٥٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٦٦٧ سعرة حرارية تقريبًا.

وبالمثل كرة القدم: $\frac{س}{٤٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$ ، س = ٥٣٣ سعرة حرارية تقريبًا.

**حاول أن تحل** ص ١٠٥

إذا مارست رياضة كرة السلة لمدة ٢٠ دقيقة، تفقد ٣٠٠ سعرة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحرارية التي تفقدها إذا مارست هذه الرياضة لمدة ٥٠ دقيقة. $\frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٣٠٠}{س}$ س = ٧٥٠ سعر حراري

## التناسب المتسلسل الهندسي Geometric Proportion

ص ١٠٦

ليكن ٲ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{ٲ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنّه يقال إن ٲ، ب، جـ في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت ٲ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{ٲ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى ب الوسط المتناسب للعددين ٲ، جـ أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى ٲ، جـ طرفي التناسب.

فمثلًا: ٢، ٤، ٨ في تناسب متسلسل لأن $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٨}$.

ولاحظ أن ٨، ٤، ٢ كذلك في تناسب متسلسل لأن $\frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢}$.

إذا كان أ، ب، جـ $\in$ ح* في تناسب متسلسل فإن جـ، ب، أ في تناسب متسلسل أيضًا.

**مثال (٩)** ص ١٠٦

أثبت أن الأعداد ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

الحلّ:

$$\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣} \quad ، \quad \frac{٩}{٢٧} = \frac{٩ \div ٩}{٢٧ \div ٩} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \frac{٣}{٩} = \frac{٩}{٢٧}$$

أي أن : ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

**حاول أن تحل** ص ١٠٦

٨ اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل. ٤ ، ١٦ ، ٦٤

**مثال (١٠)** ص ١٠٧

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س، ثم تحقق.

الحل: نكتب التناسب المتسلسل: $\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$

$س^٢ = ١٠٠$ الضرب التقاطعي

س = ١٠ أو س = −١٠

التحقق:

| | |
|---|---|
| س = ١٠ | س = −١٠ |
| $\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$ | $\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$ |
| $\frac{٥}{١٠} = \frac{١٠}{٢٠}$ | $\frac{٥}{-١٠} = \frac{-١٠}{٢٠}$ |
| ١٠٠ = ١٠٠ ✓ | ١٠٠ = ١٠٠ ✓ |

**حاول أن تحل** ص ١٠٧

٩ هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد −٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر.

$\frac{-٩}{س} = \frac{س}{٤}$ ∴ $س^٢ = -٣٦$ لا يمكن ايجاد قيمة س

لأن $س^٢$ قيمة سالبة.

ص ١٠٧



خاصيّة (١)

ليكن $ا، ب، جـ \in ح^*$

إذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ (أي أن ا، ب، جـ في تناسب متسلسل)

فإن $ب^٢ = اجـ$ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلًا: في حالة ٣، ٩، ٢٧ نجد أن:

$٣ \times ٢٧ = (٩)^٢$ (كل من الطرفين يساوي ٨١)

خاصيّة (٢) ص ١٠٨

ليكن $ا، ب، جـ، د \in ح^*$

إذا كان:

$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ (أي أن ا، ب، جـ، د في تناسب متسلسل)

فإن:

$جـ = د \times م$، $ب = د \times م^٢$، $ا = د \times م^٣$

فمثلًا: في حالة $\frac{١٦}{٨} = \frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢} = ٢$ نجد أن:

$٤ = ٢ \times ٢$، $٨ = ٢ \times (٢)^٢$، $١٦ = ٢ \times (٢)^٣$

**مثال (١)** ص ١٠٨

**إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.**

**الحل:**

∵ الأعداد في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{٦}{س} = \frac{س}{٥٤} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

$\therefore \frac{٦}{س} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

$س \times ٥٤ = ٦ \times ١٦٢$ الضرب التقاطعي

$س = \frac{٦ \times ١٦٢}{٥٤} = ١٨$

قيمة $س = ١٨$

$\frac{٤}{س-٢} = \frac{س-٢}{١} = \frac{١}{٢}$

$٢س - ٤ = ١$

$٢س = ٥$ $س = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$

**حاول أن تحل** ص ١٠٨

**١** إذا كانت الأعداد ٤، س − ٢، ١، $\frac{١}{٢}$ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

## مثال (١٢) اشرائي ص ١٠٩

إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل، فأثبت أن $\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

الحل:

$\because$ أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ تناسب متسلسل

$\therefore$ جـ = د × م ، ب = د × م$^{٢}$ ، أ = د × م$^{٣}$

$$\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}} = \frac{\text{دم}^{٣}+\text{دم}^{٢}+\text{دم}}{\text{دم}^{٢}+\text{دم}+\text{د}} = \frac{\text{دم}(\text{م}^{٢}+\text{م}+١)}{\text{د}(\text{م}^{٢}+\text{م}+١)} = \text{م} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

حل آخر: من التناسب السابق أ = ب م، ب = جـ م، جـ = د م

$$\frac{\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}}{\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}} = \frac{\text{ب م}+\text{جـ م}+\text{د م}}{\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}} = \frac{\text{م}(\text{ب}+\text{جـ}+\text{د})}{\text{ب}+\text{جـ}+\text{د}} = \text{م} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

## حاول أن تحل ص ١٠٩

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$   أ = ب م ، ب = جـ م

(١٢) إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{\text{أ}+٣\text{ب}}{\text{ب}+٣\text{جـ}} = \frac{\text{أ}-٢\text{ب}}{\text{ب}-٢\text{جـ}}$ (بشرط المقام ≠ ٠)

الأيمن = $\frac{\text{أ}+٣\text{ب}}{\text{ب}+٣\text{جـ}} = \frac{\text{ب م}+٣\text{جـ م}}{\text{ب}+٣\text{جـ}} = \frac{\text{م}(\text{ب}+٣\text{جـ})}{(\text{ب}+٣\text{جـ})} = \text{م}$

الأيسر = $\frac{\text{أ}-٢\text{ب}}{\text{ب}-٢\text{جـ}} = \frac{\text{ب م}-٢\text{ب}}{\text{جـ م}-٢\text{جـ}} = \frac{\text{ب}(\text{م}-٢)}{\text{جـ}(\text{م}-٢)} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \text{م}$

الطرفان متساويان.

٣ - ٢

التغير الطردي ص ١١٤

## مثال (١) ص ١١٢

إذا كانت ص $\alpha$ س وكانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠، فأوجد قيمة ص عندما س = ٤٠، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

الحل: ∴ ص $\alpha$ س

∴ ص = ك س      ك ثابت التغير

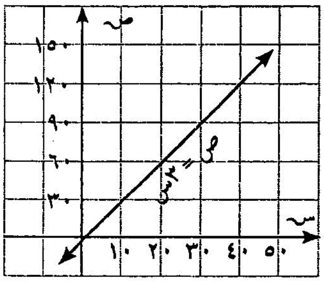
∴ ٣٠ = ك × ١٠

ك = ٣

∴ ص = ٣ س

عندما س = ٤٠ تكون ص = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

| س | ٠ | ١٠ | ٤٠ |
|---|---|---|---|
| ص = ٣س | ٠ | ٣٠ | ١٢٠ |




## حاول أن تحل ص ١١٢

١ إذا كانت ص $\alpha$ س وكانت ص = ١,٥ عندما س = ١٠، أوجد قيمة ص عندما س = ١٥

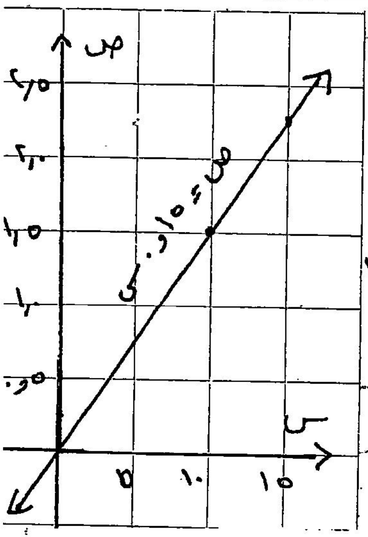
ثم مثّل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

عندما س = ١٥ ص = ٢,٢٥

ص = ك س ، ١,٥ = ك × ١٠ ، ك = ٠,١٥

ص = ٠,١٥ س

| س | ٠ | ١٠ | ١٥ |
|---|---|---|---|
| ص | ٠ | ١,٥ | ٢,٢٥ |




## مثال (٢)

في إحدى المناطق ترتفع درجة الحرارة بانتظام خلال النهار بمعدل ٣° في الساعة. اكتب معادلة تغيّر طردي تمثل هذا الارتفاع.

الحل:

∵ درجة الحرارة ترتفع بانتظام

∴ معدل التغيير = ٣

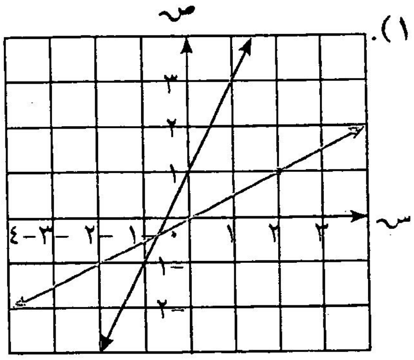
المعادلة هي ص = ٣س    حيث ص درجة الحرارة، س عدد الساعات.

ص ١١٣

## مثال (٣)

في الشكل المقابل، أي من المستقيمين يمثل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

الحل:




المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل يمثل تغيّرًا طرديًّا بين س ، ص وهو يمر بالنقطة (٢، ١).

ثابت التغير = $\frac{ص_1}{س_1} = \frac{1}{2}$

المستقيم الثاني لا يمر بنقطة الأصل فهو لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا.

### حاول أن تحل
ص ١١٣

(٢) هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ (٢، ٣)، ب (٤، ٦) يمثل تغيّرًا طرديًّا بين س، ص. اشرح إجابتك

نعم لأن $\frac{ص_1}{س_1} = \frac{3}{2}$ ، $\frac{ص_2}{س_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ تغير طردي وثابت التغير $\frac{3}{2}$

ص = $\frac{3}{2}$ س

## مثال (٤)

أي من المعادلتين التاليتين تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

(أ) ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

(ب) ٥س + ٢ص = ٩

الحل:

(أ) ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

٨ص = ٢س

ص = $\frac{2}{8}$ س = $\frac{1}{4}$ س على الصورة ص = ك س

هذه المعادلة تمثل تغيّرًا طرديًّا،

حيث ثابت التغيّر = $\frac{1}{4}$

(ب) ٥س + ٢ص = ٩

٢ص = −٥س + ٩

ص = −$\frac{5}{2}$ س + $\frac{9}{2}$ وهذه ليست على الصورة ص = ك س

إذًا هذه المعادلة لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا.

### حاول أن تحل
ص ١١٣

(٣) أي من المعادلات التالية تمثّل تغيّرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغيّر في حالة التغير الطردي.

(أ) ٧ص = ٢س  ص = $\frac{2}{7}$ س تمثل تغير طردي . ثابت التغير $\frac{2}{7}$ .

(ب) ٣س + ٤ص = ٨  ص = ٢ − $\frac{3}{4}$ س لا تمثل تغير طردي

(ج) ص + ٣س = ٢(س + ٢ص)  ص + ٣س = ٢س + ٤ص

٣ص = س  ص = $\frac{1}{3}$ س

تمثل تغير طردي . ثابت التغير = $\frac{1}{3}$

مثال (٦) ص ١١٥

البيولوجيا: تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طرديًا مع وزنه. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن ٧٥ كجم نحو ٥ ليترات.

أ أوجد ثابت التغيّر.

ب اكتب معادلة تربط العلاقة بين كمية الدم والوزن.

الحل:

نفرض أن كمية الدم في جسم الانسان هي ص وزن الجسم هو س

أ ثاتب التغيّر = $\frac{ص}{س}$

$= \frac{٥}{٧٥} = \frac{١}{١٥}$

ب معادلة التغيّر الطردي:

ص = $\frac{١}{١٥}$ س

المعادلة المطلوبة:

كمية الدم = ثابت التغير × الوزن

كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ الوزن.

حاول أن تحل ص ١١٥ الوزن ٤٥ كجم كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ × ٤٥ = ٣ ليترات تقريبًا .

٤ السؤال المفتوح: قدّر كمية الدم في جسمك مستخدما مثال (٦).

### التعبير عن التغير الطردي

في التغيّر الطرديّ تكون النسبة $\frac{ص}{س}$ ثابتة لكل زوج مرتّب حيث س ≠ ٠ في جميع الحالات. وبالتالي يمكن التعبير عن التغيّر الطرديّ باستخدام التناسب.

فيكون: $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$ ... لجميع الأزواج المرتبة ($س_١$، $ص_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$) ، ...

حيث $س_١ \neq ٠$، $س_٢ \neq ٠$ ، ...

وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغيّر ك.(معدل التغير).

ص ١١٦

## مثال (٧)

بيّن ما إذا كانت ص تتغيّر طرديًّا مع س في كل من بيانات الجدولين أ، ب. اكتب معادلة التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

الحل:

أ

| س | ٢ | ٤ | ٦ |
|---|---|---|---|
| ص | ١- | ١ | ٣ |
| $\frac{ص}{س}$ | ٠,٥- | ٠,٢٥ | ٠,٥ |

ب

| س | ٣ | ١ | ٤ |
|---|---|---|---|
| ص | ٢,٢٥ | ٠,٧٥ | ٣ |
| $\frac{ص}{س}$ | ٠,٧٥ | ٠,٧٥ | ٠,٧٥ |

- الجدول أ لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات.
- الجدول ب يمثّل تغيّرًا طرديًّا حيث ثابت التغيّر يساوي ٠,٧٥. معادلة التغيّر هي ص = ٠,٧٥ س.

## حاوِل أن تحل ص ١١٦

٥ هل تتغيّر ص طرديًّا مع س في الجدول:

| س | ١ | ١- | ٢- | ٣- |
|---|---|---|---|---|
| ص | ٣ | ١- | ٥- | ٥- |
| $\frac{ص}{س}$ | ٣ | ١ | $\frac{٥}{٢}$ | $\frac{٥}{٣}$ |

لا يمثل تغيراً طردياً لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات

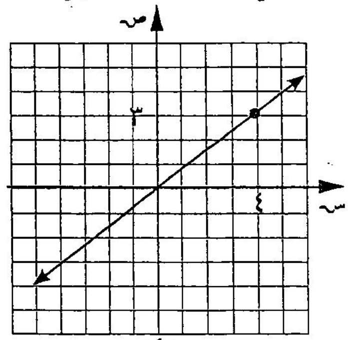
## مثال (٨)

تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ؟ فسر إجابتك.

الحل: لا: ليست كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ.

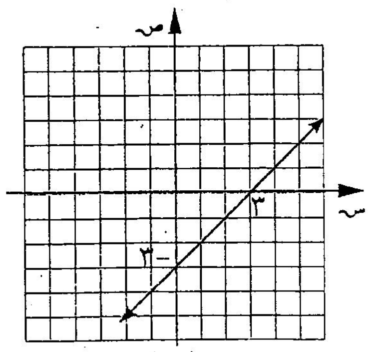
معادلة التغيّر الطرديّ تكون بالصورة ص = ك س، أي تمر بنقطة الأصل.

مثلًا: البيانات في الشكل (أ) تمثّل بالمعادلة ص = ٠,٧٥ س، وهي معادلة تغيّر طرديّ، لأنها بالصورة ص = ك س بينما البيانات في الشكل (ب) تمثّل بالمعادلة ص = س − ٣ وهي ليست بالصورة ص = ك س.




(أ)

معادلة خط مستقيم تمثّل تغيّرًا طرديًّا




(ب)

معادلة خط مسقيم لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا

١١٧

**مثال (٩)** **تطبيقات حياتية**

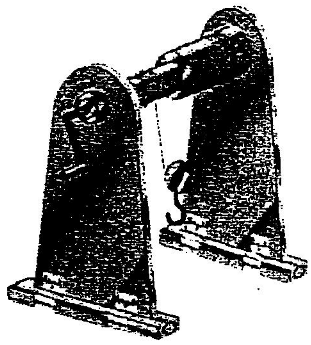
الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغيّر طرديًا مع وزن الجسم.

فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها ٠,٢٧٥ نيوتن لتتمكن إحدى المعدات من رفع جسم وزنه ١٢ نيوتن. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامه في هذه الآلة لرفع جسم وزنه ٤٥ نيوتن.

> **معلومة فيزيائية:**
> من قوانين الحركة : الوزن هو كمية فيزيائية لها نفس وحدة القوة (نيوتن) وهي ناتجة من تأثير عجلة الجاذبية الارضية على كتلة الجسم أي وزن ١ كجم = ١٠ نيوتن

الحل:

لنرمز إلى القوة بالرمز ق، وإلى وزن الجسم بالرمز و.



$\because$ ق $\propto$ و

$$\therefore \frac{\text{ق}_{١}}{\text{و}_{١}} = \frac{\text{ق}_{٢}}{\text{و}_{٢}}$$

$$\frac{\text{ق}_{٢}}{٤٥} = \frac{٠,٢٧٥}{١٢}$$

$$\text{ق}_{٢} \times ١٢ = ٤٥ \times ٠,٢٧٥$$

$$\text{ق}_{٢} = \frac{٤٥ \times ٠,٢٧٥}{١٢} = ١,٠٣١٢٥ \text{ نيوتن}$$

أي أنك تحتاج إلى كيلوجرام تقريبًا لرفع ٤٥ نيوتن.

**حاول أن تحل**

١١٧

ص = ك س
٠,٢٧٥ = ك × ١٢
ك = ٠,٠٢٢٩١

ص = ٠,٠٢٢٩١ س
٤,٣ = ٠,٠٢٢٩١ × س
س = ١٨٧,٦٩١ نيوتن

(٦) اكتب معادلة التغيّر الطردي للمثال السابق، واستخدمها لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام قوّة قدرها ٤,٣ نيوتن في الرافعة نفسها.

— ١٠٥ —

# التغير العكسي

ص ١٢٠

## مثال (٢)

منطقة مستطيل مساحتها ٢٤سم$^{٢}$، وطولها س سم، وعرضها ص سم. إذا كان كل من س، ص أعدادًا كلية، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص ثم حدد نوع التغير الذي يمثل هذه العلاقة.

الحل:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| س | ٢٤ | ١٢ | ٨ | ٦ |
| ص | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |

مساحة المستطيل = س ص = ٢٤

أي س ص = ثابت ونعبر عن ذلك رياضيًّا:

س × ص = ك     ك ثابت

أي أن ص = $\frac{ك}{س}$ ،   ص $\alpha$ $\frac{١}{س}$

∴ التغير عكسي.

## حاول أن تحل

① 

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| س | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ١٠ |
| ص | ٣٠ | ٢٠ | ١٥ | ١٢ | ١٠ | ٦ |
| س×ص | ٦٠ | ٦٠ | ٦٠ | ٦٠ | ٦٠ | ٦٠ |

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعبّر عن تغيير عكسي؟ اشرح إجابتك. نعم لأن س×ص = ٦٠ ثابت.

② كوّن جدولًا من س، ص على أن يكون س ص يعبّر عن تغيير عكسي.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| س | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٦ | ١٢ |
| ص | ١٢ | ٦ | ٤ | ٢ | ٢ | ١ |

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي.

إذا كان ($س_١$، $ص_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$) زوجين مرتبين في تغيّر عكسي.

ص $\alpha$ $\frac{١}{س}$ ، أي ص = $\frac{ك}{س}$ فإنّ

$س_١ ص_١ = س_٢ ص_٢ = ك$

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

في مثال العمل التعاوني السابق نجد أن:

٣٢ × ٥ = ٨٠ × ٢

ومن ذلك نرى أن: $\frac{٥}{٢} = \frac{٨٠}{٣٢}$ ، $\frac{٨٠}{٥} = \frac{٣٢}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥} = \frac{٣٢}{٨٠}$ ، ...

- ٦ - ١ -

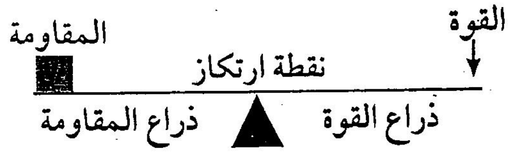
ص ١٢١

## مثال (٣) تطبيقات حياتية

الفيزياء: الوزن الذي تحتاج إليه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغير عكسيًا مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز. جاسم وزنه ٥١٠ نيوتن ويجلس على بعد ٢,٥ م من نقطة الارتكاز. أين يجلس وائل الذي وزنه ٧٥٠ نيوتن ليحدث التوازن؟

**معلومة فيزيائية: قانون الرافعة**

ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بين نقطة تأثير القوة ونقطة الارتكاز (ذراع القوة) يساوي حاصل ضرب المقاومة في ذراع المقاومة.



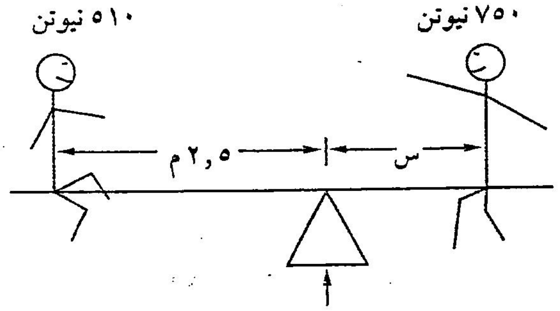

الحل: قانون الرافعة: القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

من توازن الرافعة: الوزن$_1$ × المسافة$_1$ = الوزن$_2$ × المسافة$_2$

$$٥١٠ \times ٢,٥ = ٧٥٠ \times س$$

$$س = \frac{٥١٠ \times ٢,٥}{٧٥٠} = ١,٧$$

أي أن وائل يجلس على مسافة ١,٧ م بعيدًا عن نقطة الارتكاز.




ص ١٢١

### حاول أن تحل

٢, ٠ × ٧٥ = ٣ × س    ∴ س = ٥, ٠

(٣) أ في تغير عكسي ص $\alpha$ $\frac{١}{س}$ إذا كانت ص = ٢, ٠ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

ب ما وزن جسم يوضع على مسافة ٣ م من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازنًا مع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على بعد ٦ م من نقطة الارتكاز؟

س × ٣ = ٤٠ × ٦    س = ٨٠ نيوتن

جـ رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥ كم/ ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠ كم/ ساعة.

٣ × ٧٥ = ٩٠ × س

س = ٢,٥ ساعة

ص ١٢٢

## حاول أن تحل

٤ بيّن نوع التغيّر المناسب للموقف في كل من الحالات التالية، ثم اكتب رقم المعادلة التي تمثله: عكسي (ج)

(١) المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع مبلغ ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي.

(٢) تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم ٢٠ فلسًا. طردي (د)

(٣) أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيّران من يوم إلى يوم. عكسي (ب)

(٤) عدد من الأشخاص يشترون هدايا تذكارية سعر الواحدة ٥ دنانير. طردي (أ)

أ ص = ٥س

ب س ص = ٥

ج ص = $\frac{١٠٠}{س}$

د ص = ٢٠ س

## مثال (٥) تطبيقات حياتية

توفي رجل وترك لزوجته وأبنائه مبلغ ٣٤٥٠٠٠٠ دينار. (والداه متوفيان).

أوجد نصيب كل فرد إذا تألفت عائلته من:

أ ٥ أولاد و٤ بنات ب ٤ أولاد و٣ بنات ج ولد واحد وابنتين

ماذا تلاحظ؟

الحل:

للزوجة الثمن أي $\frac{١}{٨}$ × ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ = ٤٣١ ٢٥٠

يبقى لأبنائه: ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ − ٤٣١ ٢٥٠ = ٣ ٠١٨ ٧٥٠

أ عدد الحصص = عدد الابناء × ١ + عدد البنات × $\frac{١}{٢}$

= ٥ × ١ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٧

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ ٧ = ٤٣١ ٢٥٠ دينارًا.

نصيب الابنة = $\frac{١}{٢}$ × ٤٣١ ٢٥٠ = ٢١٥ ٦٢٥ دينارًا.

ب عدد الحصص = ٤ × ١ + ٣ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١١}{٢}$

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ $\frac{١١}{٢}$ ≃ ٥٤٨ ٨٦٣,٦ دينارًا.

نصيب الابنة = ٥٤٨ ٨٦٣,٦ ÷ ٢ ≃ ٢٧٤ ٤٣١,٨ دينارًا.

ج عدد الحصص = ١ × ١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ ٢ = ١ ٥٠٩ ٣٧٥ دينارًا.

نصيب الابنة= ١ ٥٠٩ ٣٧٥ ÷ ٢ = ٧٥٤ ٦٨٧,٥ دينارًا.

سورة النساء

﴿ يُوصِيكُمُ اللَّهُ فِي أَوْلَادِكُمْ
لِلذَّكَرِ مِثْلُ حَظِّ الْأُنثَيَيْنِ فَإِن كُنَّ نِسَاءً
فَوْقَ اثْنَتَيْنِ فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَ وَإِن كَانَتْ
وَاحِدَةً فَلَهَا النِّصْفُ وَلِأَبَوَيْهِ لِكُلِّ
وَاحِدٍ مِّنْهُمَا السُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُ
وَلَدٌ فَإِن لَّمْ يَكُن لَّهُ وَلَدٌ وَوَرِثَهُ أَبَوَاهُ
فَلِأُمِّهِ الثُّلُثُ فَإِن كَانَ لَهُ إِخْوَةٌ فَلِأُمِّهِ
السُّدُسُ مِن بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصِي بِهَا أَوْ
دَيْنٍ آبَاؤُكُمْ وَأَبْنَاؤُكُمْ لَا تَدْرُونَ أَيُّهُمْ
أَقْرَبُ لَكُمْ نَفْعًا فَرِيضَةً مِّنَ اللَّهِ إِنَّ
اللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمًا (١١) ﴾

نلاحظ أنه كلما زاد عدد الحصص قل نصيب الفرد. أي أن نصيب كل فرد من الابناء يتغير عكسيًا مع عدد الحصص.

## حاول أن تحل

ص ١٢٢

٥ هندسة: خصصت قطعتا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل: أبعاد القطعة الأولى ٤٢ م × ٣٥ م، فإذا كان طول القطعة الثانية ٥٢,٥ م فاحسب عرضها.

٤٢ × ٣٥ = ٥٢,٥ × ص

ص = ٢٨ م

# الوحدة الرابعة

# الهندسة المستوية

## (( ملخص لأهم قوانين الوحدة الرابعة ))

- مقياس الرسم = $\dfrac{\text{الطول على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$

- إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أعداد متناسبة فإن : $\dfrac{أ}{ب} = \dfrac{جـ}{د}$

  أ × د = ب × جـ

- إذا كان $\dfrac{أ}{ب} = \dfrac{ب}{جـ}$ يقال أن الأعداد أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل والعكس صحيح .

- النسبة المئوية للتغير = $\dfrac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠$

- بيان التغير الطردي هو دالة خطية تكتب بالصورة $\boxed{ص = ك س}$

  ك ≠ ٠ ، ك : ثابت التغير .

- في التغير الطردي : النسبة $\dfrac{ص}{س}$ ثابتة لكل زوج مرتب ( س ≠ ٠ )

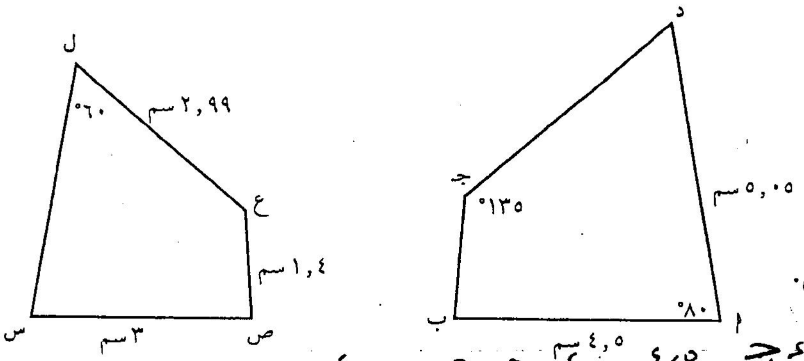
- في التغير العكسي ، $س_١ \times ص_١ = س_٢ \times ص_٢$ أو $\dfrac{س_١}{س_٢} = \dfrac{ص_٢}{ص_١}$

- في التغير العكسي : حاصل الضرب هو ثابت التغير

  س × ص = ك ( ثابت ) .

الوحدة الرابعة - الهندسة المستوية

## حاول أن تحل ص ١٣١




١ في الشكل المقابل، المضلعان أب جـ د، س ص ع ل متشابهان.
أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في كلا الضلعين.

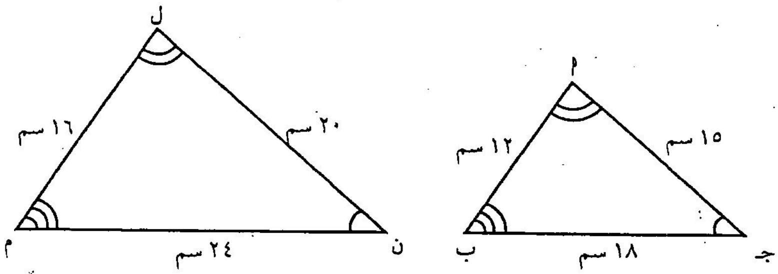
ق(د) = ٦٠° ، ق(ب) = ٨٥° ، ق(س) = ٨٥°

$\frac{ب جـ}{١,٤} = \frac{٤,٥}{٣}$ ، ب جـ = ٢,١

$\frac{د جـ}{٢,٩٩} = \frac{٤,٥}{٣}$ ، د جـ = ٤,٤٨٥ سم

$\frac{٥,٠٥}{س ل} = \frac{٤,٥}{٣}$ ، س ل = ٣,٣٦٧ سم

### مثال (٢)




حدّد فيما إذا كان المثلثان أب جـ، ل م ن متشابهين.
إذا كان المثلثان متشابهين،
اكتب قاعدة التشابه ونسبة التشابه.

الحلّ:

من المعطيات في الشكل: الزوايا المتناظرة متطابقة. (١)

بمقارنة أطوال الأضلاع المتناظرة نجد أن:

$$\frac{أب}{ل م} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{ب جـ}{م ن} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{جـ أ}{ن ل} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$$

أي أن:

$$\frac{أب}{ل م} = \frac{ب جـ}{م ن} = \frac{جـ أ}{ن ل} = \frac{٣}{٤}$$

بالتالي:

أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. (٢)

من (١)، (٢) يتبيّن أن:

$\Delta$أب جـ ~ $\Delta$ل م ن، وأن نسبة التشابه $\frac{٣}{٤}$. الرمز ~ يعني تشابه

كذلك نسبة التشابه $\frac{٤}{٣}$

ص ١٣٢

∵ ق(أ) = ق(د) ، ق(ب) = ق(هـ) ، ق(جـ) = ق(و)

∴ الزوايا المتناظرة متطابقة ①

## حاول أن تحل ص ١٣٢

$\frac{أ ب}{د هـ} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ جـ}{د و} = \frac{١٦}{٢٤} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{١٤}{٢١} = \frac{٢}{٣}$

∴ أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة ②

(٢) المثلثان أب جـ، دهـ و فيهما:

ق(أ) = ق(د) ، ق(ب) = ق(هـ) ، ق(جـ) = ق(و) من ① ، ② ∴ △ أ ب جـ ~ △ د هـ و .

أب = ١٢ سم، ب جـ = ١٤ سم، أجـ = ١٦ سم، دهـ = ١٨ سم، هـ و = ٢١ سم، د و = ٢٤ سم.

هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان؟ وضِّح إجابتك.

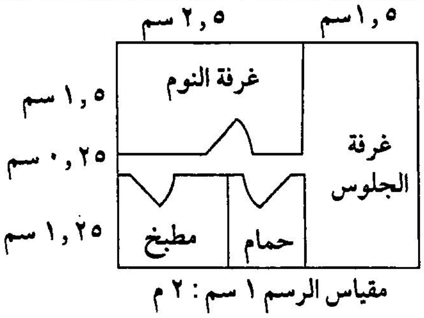
ملاحظة مهمة: إن نسبة التشابه تقارن بين قياسين بالوحدات نفسها، فمثلًا أطوال أضلاع المثلثين في المثال (٢) هي بالسنتيمتر.

يستخدم التناسب في تطبيقات حياتية، ومن أهمها **مقياس الرسم** الذي يستخدم في عمل الخرائط والرسوم الهندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقية، وذلك بنسبة ثابتة بين الأبعاد في الرسم والأبعاد في الحقيقة.

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$$

وإذا كانت نسبة التشابه تقارن بين أبعاد لها الوحدة نفسها، فإن مقياس الرسم يمكن أن يكون بوحدات مختلفة، فمثلًا يمكن أن يكون ١ سم لكل ١٠٠ م أو ١ سم لكل كيلومتر وهكذا.

## مثال (٣)




مقياس الرسم ١ سم : ٢ م

ما الأبعاد الحقيقية لغرفة النوم المبينة في الرسم الهندسي لإحدى الشقق السكنية؟

الحلّ:

استخدم المسطرة لقياس الأبعاد في الشكل المرسوم، وبفرض أن:

طول غرفة النوم في الرسم = ٢,٥ سم، عرض الغرفة في الرسم = ١,٥ سم.

لإيجاد الطول الحقيقي لغرفة النوم: $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}} = \frac{١}{٢٠٠}$ مقياس الرسم ١ سم : ٢م

$\frac{٢,٥}{س} = \frac{١}{٢٠٠}$

س = ٢,٥ × ٢٠٠ باستخدام الضرب التقاطعي

س = ٥٠٠ سم، س = ٥ م. طول غرفة النوم ٥ أمتار.

ولإيجاد عرض الغرفة الحقيقي:

$\frac{١,٥}{ص} = \frac{١}{٢٠٠}$

ص = ١,٥ × ٢٠٠ = ٣٠٠ سم = ٣ م. عرض الغرفة ٣ أمتار. عرض غرفة الجلوس = ٣ م ، طول الشقة = ٨ متر

طول غرفة الجلوس = ٦ أمتار $\frac{١,٥}{ص} = \frac{١}{٢٠٠}$ ، $\frac{٤}{ص} = \frac{١}{٢٠٠}$

## حاول أن تحل

$\frac{٣}{ص} = \frac{١}{٢٠٠}$

(٣) احسب الأبعاد الحقيقية لكل من غرفة الجلوس والشقة كلها بحسب القياسات المبينة في الشكل السابق.

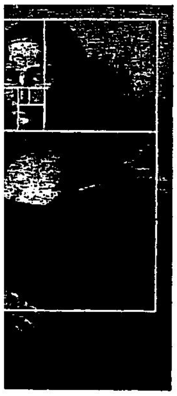
عرض الشقة = ٦ أمتار

$\frac{٣}{ص} = \frac{١}{٢٠٠}$

**حاول أن تحل** ص ١٣٣

④ قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها ١٠,٥ سم، ٦,٥ سم.

هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟ نعم $\frac{١٠,٥}{٦,٥}$ = $\frac{١,٦١٥}{١}$



لوحة مونا

التحدي: إذا كان العدد الذهبي س هو الجذر الموجب للمعادلة التربيعية $س^٢ = س + ١$

فأثبت أن: $س = \sqrt{١ + \sqrt{١ + \sqrt{١ + ...}}}$

استخدم الرسامون كثيرًا المستطيل الذهبي في أعمالهم.

**مثال (٥)**

يخطط أحد الفنانين لرسم لوحة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم. كم يجب أن يكون عرض اللوحة ليكون المستطيل (علمًا بأن النسبة الذهبية ≃ ١,٦١٨ :١)

الحلّ:

حتى تكون اللوحة على شكل مستطيل ذهبي يجب أن يكون:

$\frac{\text{طول اللوحة}}{\text{عرض اللوحة}} = \frac{١,٦١٨}{١}$

ليكن هـ عرض اللوحة.

$\frac{٦٠}{هـ} \simeq \frac{١,٦١٨}{١}$ كتابة التناسب

$١,٦١٨\,هـ \simeq ٦٠$ الضرب التقاطعي

$هـ \simeq \frac{٦٠}{١,٦١٨}$

$هـ \simeq ٣٧$

يجب أن يكون عرض اللوحة حوالى ٣٧ سم.

**حاول أن تحل** ص ١٣٤

⑤ إذا كان عرض أحد المستطيلات الذهبية ٦٠ سم، فكم يجب أن يكون طوله؟

$\frac{\text{الطول}}{\text{العرض}} = \frac{١,٦١٨}{١}$ ، $\frac{س}{٦٠} = \frac{١,٦١٨}{١}$ ، س = ٩٧,٨ سم

تشابه المثلثات ص ١٣٥

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين ا ب جـ، ع د ل.

البرهان: في المثلثين ا ب جـ، ع د ل:

ق(بˆ) = ق(دˆ) = ٥٠° (معطى) (١)

ق(جˆ) = ١٨٠° - (٥٠° + ٨٥°)

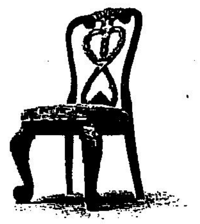
= ١٨٠° - ١٣٥° = ٤٥°. مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°.

∴ ق(جˆ) = ق(لˆ) (٢)

من (١)، (٢)، نستنتج أن المثلثين ا ب جـ، ع د ل متشابهان أي أن Δا ب جـ ~ Δع د ل.

**من الاستخدامات:**

يستخدم منفذو الحفر على المفروشات الخشبية التشابه بين المثلثات لوضع تصاميم لأعمالهم قبل تنفيذها.



**حاول أن تحل** ص ١٣٦

البرهان:

المثلثان ا ب جـ ، م ح ل فيهما

ق(اˆ) = ق(مˆ) = ٩٠° ①

ق(حˆ) = ١٨٠ - (٩٠ + ٣٥) = ٥٥°

∴ ق(بˆ) = ق(حˆ) = ٥٥° ②

من ①، ② ∴ Δ ا ب جـ ~ Δ م ح ل

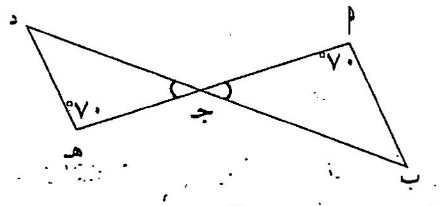
① المثلث ا ب جـ قائم الزاوية ا، ق(بˆ) = ٥٥°.

المثلث م ل ح قائم الزاوية م، ق(لˆ) = ٣٥°.

أثبت تشابه المثلثين ا ب جـ، م ح ل.

**مثال (٢)**

أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان. اكتب عبارة التشابه.




الحل:

المعطيات:

Δا ب جـ ، Δد هـ جـ فيهما:

ق(اˆ) = ٧٠°، ق(هـˆ) = ٧٠°

ا جـˆ ب، هـ جـˆ د متقابلتان بالرأس

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين ا ب جـ، هـ د جـ، وكتابة عبارة التشابه.

البرهان: المثلثان ا ب جـ ، هـ د جـ فيهما:

ق(ا جـˆ ب) = ق(هـ جـˆ د) زاويتان متقابلتان بالرأس

ق(جـ اˆ ب) = ق(جـ هـˆ د) معطى

∴ Δا ب جـ ~ Δ هـ د جـ (المثلثان متشابهان) نظرية (١)

**حاول أن تحل** ص ١٣٦

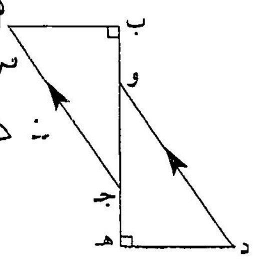
البرهان:

المثلثان ا ب جـ ، د هـ و فيهما

ق(بˆ) = ق(هـˆ) = ٩٠° معطى

ق(ب جـˆ ا) = ق(هـ وˆ د) بالتبادل والتوازي

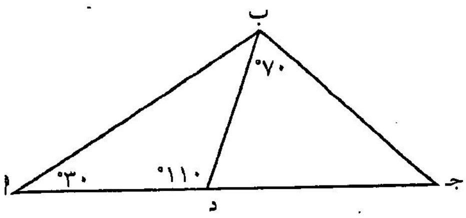
∴ Δ ا ب جـ ~ Δ هـ و د




② في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين ا ب جـ، د هـ و.

ص ١٣٧

## مثال (٣)




أثبت أن المثلثين أب د ، أجـ ب متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

المعطيات:

في الشكل:

ق(جـ بَ د) = ٧٠° ، ق(أدَب) = ١١٠° ، ق(ب أَ د) = ٣٠°.

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أب د، أجـ ب.

البرهان:

المثلثان أب د، أجـ ب فيهما:

ق(ب أَ د) = ق(ب أَ جـ) = ٣٠°     زاوية مشتركة

ق(أبَ د) = ١٨٠° - (١١٠° + ٣٠°) = ٤٠°     مجموع زوايا المثلث أب د = ١٨٠°

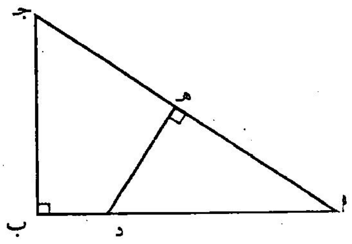
ق(أبَ جـ) = ٤٠° + ٧٠° = ١١٠°

∴ ق(أبَ جـ) = ق(أدَ ب)

المثلثان متشابهان     (تطابق زاويتين)

△أب د ~ △أجـ ب.

### حاول أن تحل




(٣) في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين أب جـ، أهـ د، واكتب عبارة التشابه.

المثلثان أب جـ ، أ هـ د فيهما :

ق(أ بَ جـ) = ق(أ هَ د) = ٩٠° معطى

ق(ب أَ جـ) = ق(هـ أَ د)     زاوية مشتركة.

∴ △ أ ب جـ ~ △ أ هـ د

## القياس غير المباشر
## Indirect Measurement

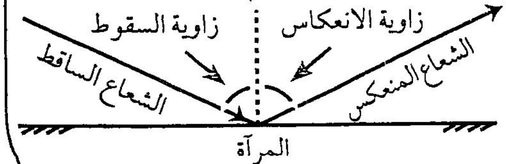
في بعض الحالات، يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة. في هذه الحالة، يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.

إحدى الطرائق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية.

فكما تعرف في الفيزياء، إن **قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس.**

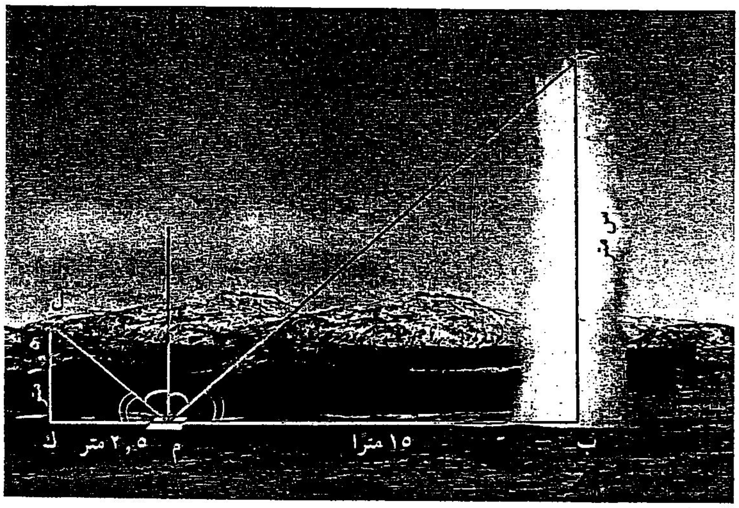
**تذكر:**

**قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس**



ص ١٣٨

## مثال (٤)




أراد سعيد أن يعرف ارتفاع المياه. وضع مرآة على مسافة ١٥ مترًا من موقع اندفاع المياه، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى أعلى نقطة بلغتها المياه في وسط المرآة. عند هذه النقطة كان سعيد قد تحرك بعيدًا عن المرآة بمسافة ٢,٥ متر، وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق الأرض. إذا كانت قدماه والمرآة وموقع اندفاع المياه على استقامة واحدة، فأوجد ارتفاع المياه.

المعطيات:

م ب = ١٥ مترًا ، م ك = ٢,٥ متر ، ك ل = ١,٥ متر

قدما سعيد، المرآة، موقع اندفاع المياه على استقامة واحدة.

المطلوب: معرفة ارتفاع المياه.

البرهان:

المثلثان م ب جـ ، م ك ل فيهما:

ق(ب مˆ جـ) = ق(ك مˆ ل) زاوية الانعكاس = زاوية السقوط

ق(بˆ) = ق(كˆ) = ٩٠°

المثلثان م ب جـ ، م ك ل متشابهان (تطابق زاويتين)

$\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ك}}$ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

$\frac{\text{س}}{١,٥} = \frac{١٥}{٢,٥}$

$٢,٥\text{س} = ١,٥ \times ١٥$

$\text{س} = \frac{١,٥ \times ١٥}{٢,٥} = ٩$

يبلغ ارتفاع المياه ٩ أمتار.


البرهان: المثلثان ٩ ب ج ، ك ل ج

م(بˆ) = م(كˆ) = ٩٠°

م(٩ جˆ ب) = م(ل جˆ ك)

زاوية الانعكاس = زاوية السقوط

∴ Δ ٩ ب ج ~ Δ ل ك ج

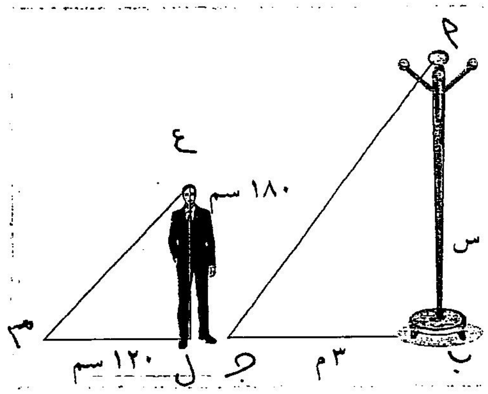
$\frac{\text{س}}{١,٨} = \frac{١٢}{١,٢}$ ∴ س = ١٨ متر

### حاول أن تحل

ص ١٣٨

٤ أ لإيجاد ارتفاع برج، وضع سالم مرآة مستوية على الأرض على بعد ١٢ مترًا من قاعدة البرج.
وعندما كان سالم على بعد ١,٢ متر من المرآة استطاع أن يرى قمة البرج.
إذا كان ارتفاع عين سالم عن الأرض ١,٨ متر في هذه النقطة، فكم يكون ارتفاع البرج؟
(علمًا بأن قاعدة البرج وقدمي سالم والمرآة على استقامة واحدة).

ص ١٣٩




ت عمود طول ظله ٣ م في الوقت نفسه الذي يكون فيه طول ظل محمد ١٢٠ سم. إذا كان طول محمد ١٨٠ سم، فكم سيكون طول العمود؟

المثلثان متشابهان  ق(ب̂) = ق(ل̂) = ٩٠°

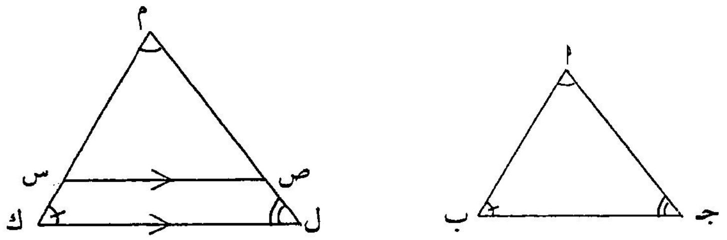
ق(ج̂) = ق(م̂) بالتناظر

$\frac{س}{١٨٠} = \frac{٣٠٠}{١٢٠}$

س = ٤٥٠ م

نظرية (٢)

**يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.**




المعطيات: △أب جـ، △م ك ل فيهما:

$\frac{أب}{م ك} = \frac{أجـ}{م ل} = \frac{ب جـ}{ك ل}$.

المطلوب: إثبات أن △أب جـ ~ △م ك ل.

العمل:

نأخذ س ∈ $\overline{م ك}$ حيث م س = أب ونرسم $\overline{س ص}$ // $\overline{ل ك}$.

∴ △م س ص ، △م ك ل متشابهان. لماذا؟ (١)

$\frac{م س}{م ك} = \frac{م ص}{م ل} = \frac{س ص}{ك ل}$   تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{أب}{م ك} = \frac{أجـ}{م ل} = \frac{ب جـ}{ك ل}$   معطى

بما أن م س = أب إذًا $\frac{م س}{م ك} = \frac{أب}{م ك}$

ومنه $\frac{م ص}{م ل} = \frac{أجـ}{م ل}$ ، $\frac{س ص}{ك ل} = \frac{ب جـ}{ك ل}$   تساوي التناسبين

م ص = أجـ،   س ص = ب جـ.   لماذا؟

△م س ص ، △أب جـ متطابقان.   (ض. ض. ض) فهما متشابهان   (٢)

من (١)، (٢)

∴ △أب جـ ~ △م ك ل   وهو المطلوب.

لاحظ أن:

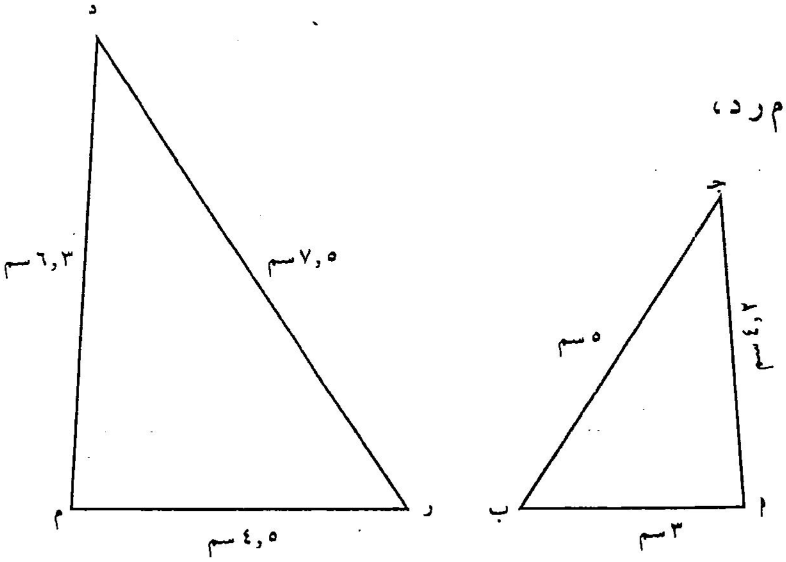
ق(أ̂) = ق(م̂)، ق(ب̂) = ق(ك̂)، ق(جـ̂) = ق(ل̂).

ص ١٤٠

## مثال (٥)

في الشكل المقابل، أ أثبت تشابه المثلثين أب جـ، م ر د ،

ب اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.




المعطيات:

أب = ٣ سم، ب جـ = ٥ سم، جـأ = ٤,٢ سم

م ر = ٤,٥ سم، رد = ٧,٥ سم، دم = ٦,٣ سم.

المطلوب:

أ إثبات تشابه المثلثين أب جـ، م ر د.

ب كتابة أزواج الزوايا متساوية القياس.

البرهان:

أ $\frac{\text{أب}}{\text{م ر}} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$ (١)

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{رد}} = \frac{٥}{٧,٥} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

$\frac{\text{جـأ}}{\text{دم}} = \frac{٤,٢}{٦,٣} = \frac{٢}{٣}$ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) نستنتج أن $\frac{\text{أب}}{\text{م ر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{رد}} = \frac{\text{جـأ}}{\text{دم}} = \frac{٢}{٣}$

∴ المثلثان متشابهان أي أن △أب جـ ~ △م ر د.

ب جـ هي الزاوية المقابلة للضلع أب، د هي الزاوية المقابلة للضلع م ر.

∴ ق(جـ) = ق(د)

الزاوية أ مقابلة للضلع ب جـ، الزاوية م مقابلة للضلع رد.

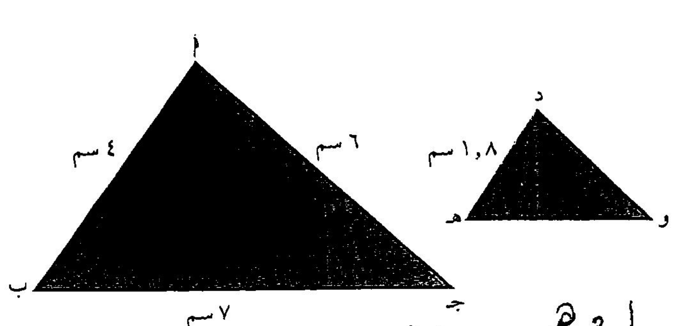
∴ ق(أ) = ق(م)

ويبقى: ق(ب) = ق(ر).

ق(جـ) = ق(د)، ق(أ) = ق(م)، ق(ب) = ق(ر).

## حاول أن تحل

ص ١٤٠




٥ في الشكل المقابل المثلثان أب جـ ، د هـ و متشابهان.

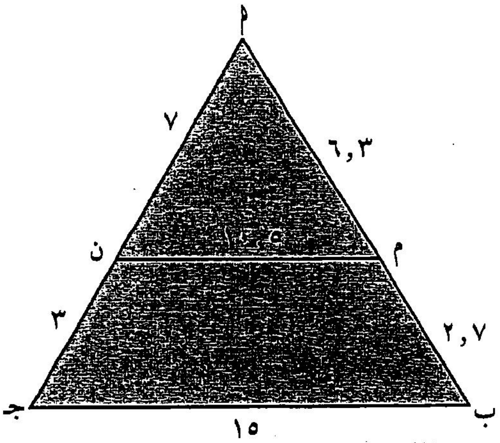
أوجد طول كل من دو ، وهـ.

$\frac{\text{دو}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{أب}}$ ، $\frac{\text{دو}}{٦} = \frac{١,٨}{٤}$ ∴ دو = ٢,٧ سم

$\frac{\text{وهـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{أب}}$ ، $\frac{\text{وهـ}}{٧} = \frac{١,٨}{٤}$ ، وهـ = ٣,١٥ سم

ص ١٤١

## مثال (٦)




في الشكل المرسوم،

أولًا: أثبت أن:

أ ∆أب جـ ~ ∆أم ن. ب $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

ثانيًا: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. ماذا تلاحظ؟

المعطيات:

أم = ٦,٣ ، أن = ٧، م ن = ١٠,٥ ، م ب = ٢,٧، ن جـ = ٣، ب جـ = ١٥

أولًا: المطلوب: أ إثبات تشابه المثلثين أب جـ، أم ن. ب $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

البرهان: أ $\frac{\text{أم}}{\text{أب}} = \frac{٦,٣}{٦,٣ + ٢,٧} = \frac{٦,٣}{٩} = ٠,٧$  أوجد: $\frac{\text{أن}}{\text{أجـ}}$ = ...، $\frac{\text{م ن}}{\text{ب جـ}}$ = ... . ماذا تلاحظ؟

استخدم نظرية (٣) . ∆أم ن ~ ∆أب جـ وهو المطلوب (أ).

ب من تشابه المثلثين: ق(∠أم ن) = ق(∠أب جـ) وهما في وضع تناظر.

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{م ن}}$.

ثانيًا: المطلوب: إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين أب جـ، أم ن.

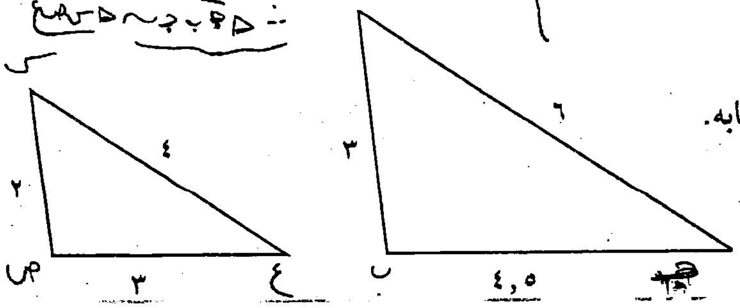
البرهان: $\frac{\text{محيط ∆أم ن}}{\text{محيط ∆أب جـ}} = \frac{٢٣,٨}{٣٤} = ٠,٧$

نلاحظ أن النسبة بين محيطي المثلثين تساوي نسبة التشابه.

البرهان : في ∆ أب جـ ، ∆ س ص ع
$\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{٣}{٢}$
$\frac{\text{أجـ}}{\text{س ع}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$
$\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{٤,٥}{٣} = \frac{٣}{٢}$
∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة
∴ ∆أب جـ ~ ∆س ص ع

### حاول أن تحل

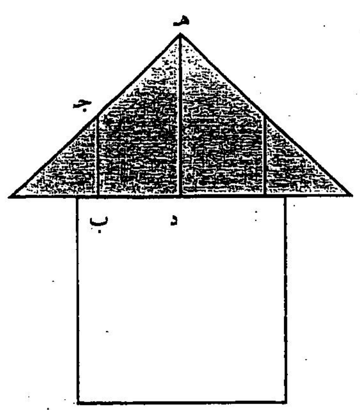
ص ١٤١

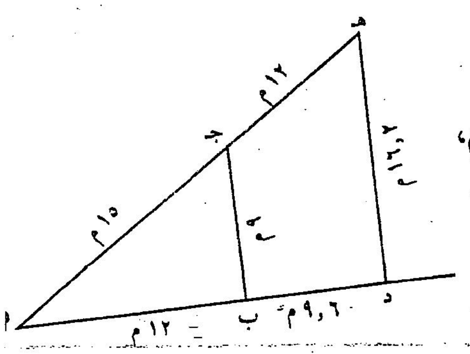



٦ في الشكل المقابل، أثبت أن المثلثين متشابهان.

## مثال (٧) تطبيقات حياتية

يبيّن الشكل المقابل قسمًا من المنطقة العلوية في أحد الأهراءات (مخازن الحبوب). أراد يوسف التحقق من توازي الدعامتين $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$. هل يمكنك مساعدته؟




المعطيات: أ، ب، د على استقامة واحدة.

أ، جـ، هـ على استقامة واحدة.

أب = ١٢ م، ب د = ٩,٦ م، ب جـ = ٩ م،

د هـ = ١٦,٢ م، أجـ = ١٥ م، جـ هـ = ١٢ م.

المطلوب : إثبات توازي $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$.

ص ١٤٢

البرهان: △أب جـ ، △أدهـ فيهما:

$$\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{١٢}{١٢ + ٩,٦} = \frac{٥}{٩}$$

$$\frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}} = \frac{١٥}{١٥ + ١٢} = \frac{٥}{٩}$$

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{دهـ}} = \frac{٩}{١٦,٢} = \frac{٥}{٩}$$

∴ المثلثان متشابهان (نظرية ٢)

الزاويتان أبَ جـ ، أدَهـ متناظرتان ومتساويتان في القياس إذًا $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$.

(م جـ)² = ١٥² = ٢٢٥

(ب جـ)² + (م ب)² = ٩² + ١٢² = ٢٢٥ ∴ △م ب جـ قائم الزاوية في ب

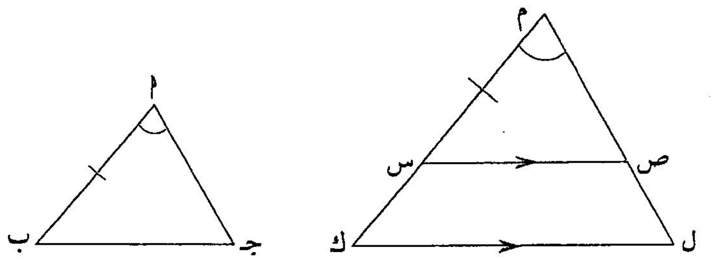
جا م = جـ/١٥

**حاول أن تحل**

(٧) في المثال (٧)، أثبت أن △أب جـ قائم الزاوية ب ثم أوجد قياس الزاوية أ. ∴ ق(مَ) = ٣٦,٩°

**نظرية (٣)**

**يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.**




**المعطيات:** ق(أَ) = ق(مَ)، $\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$

**المطلوب:** إثبات أن: △أب جـ ~ △م ك ل

**العمل:** نأخذ س ∈ $\overline{\text{م ك}}$ حيث أب = م س
ونرسم س ص // ك ل.

**البرهان:** نبدأ بإثبات تشابه △م س ص، △م ك ل.

ق(م سَ ص) = ق(م كَ ل) زاويتان بالتوازي والتناظر، ق(م صَ س) = ق(م لَ ك) زاويتان بالتوازي والتناظر.

وبالتالي من نظرية (١) نستنتج أن: △م س ص ~ △م ك ل متشابهان.

∴ $\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ل}}$ (١) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

سنثبت الآن أن △أب جـ، △م س ص متطابقان.

$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$ (٢) معطى

بما أن أب = م س وبمقارنة التناسبين (١)، (٢) نحصل على أجـ = م ص.

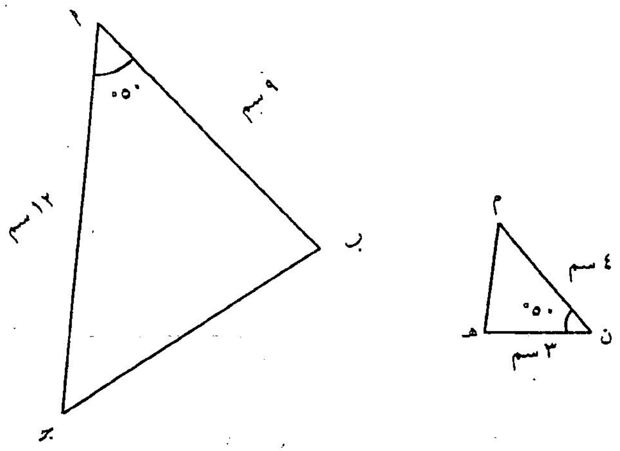
∴ △أب جـ ، △م س ص متطابقان (ض. ز. ض.) فهما متشابهان.

△أب جـ ~ △ م س ص ، △ م س ص ~ △ م ك ل. ∴ △أب جـ ~ △م ك ل.

> **معلومة مفيدة:**
> عندما نقول (بالتساوي والتناظر) نعني وجود مستقيمين متوازيين وقاطع لهما، وزاويتان في وضع تناظر.

ص ١٤٣

## مثال (٨)




في الشكل المقابل أب جـ، ن هـ م مثلثان، فإذا كان:

ق(أ̂) = ق(ن̂) = ٥٠°

أب = ٩ سم، أجـ = ١٢ سم، م ن = ٤ سم، م هـ = ٣ سم.

أثبت تشابه المثلثين أب جـ، ن هـ م.

المعطيات:

ق(م̂) = ق(ن̂) = ٥٠°

أب = ٩ سم، أجـ = ١٢ سم، م ن = ٤ سم، ن هـ = ٣ سم

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أب جـ، ن هـ م.

البرهان:

المثلثان أب جـ، ن هـ م فيهما

ق(أ̂) = ق(ن̂) = ٥٠° (معطى) (١)

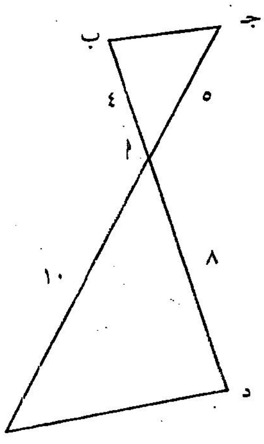
$\frac{\text{أب}}{\text{ن هـ}} = \frac{٩}{٣} = ٣$

$\frac{\text{أجـ}}{\text{م ن}} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ن}}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن المثلثين أب جـ، ن هـ م متشابهان.

### حاول أن تحل ص ١٤٣




٨ في الشكل المقابل، أثبت أنّ المثلثين أب جـ، أد هـ متشابهان.

البرهان :

المثلثان جـ م ب ، هـ م د فيهما

ق( جـ م̂ ب) = ق( هـ م̂ د) بالتقابل بالرأس

$\frac{\text{جـ م}}{\text{هـ م}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

$\frac{\text{م ب}}{\text{م د}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ △ م ب جـ ~ △ م د هـ .

**حاول أن تحل**

٩ في المثلثين أ ب جـ، ف د ي: أ ب = ٧ سم، ب جـ = ٦ سم، ق(ب̂) = ٦٣°.
د ي = ٤,٥ سم، ق(د̂) = ٦٣°، ف د = ٦,٣ سم. هل المثلثان أ ب جـ، د ي ف متشابهان؟

نعم متشابهان.

البرهان: في المثلثان ق(ب̂) = ق(د̂) = ٦٣°

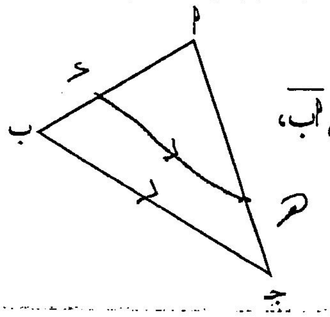
$$\frac{أ ب}{ف د} = \frac{١٠}{٩}$$

$$\frac{ب هـ}{د ي} = \frac{١٠}{٩}$$ ∴ △ أ ب هـ ~ △ ف د ي

نعم متشابهان



**حاول أن تحل**




١٠ ارسم بشكل تقريبي قطعة مستقيمة د هـ في المثلث أ ب جـ موازية للقطعة ب جـ حيث د تنتمي إلى أ ب، هـ تنتمي إلى أ جـ على أن تكون نسبة التشابه بين المثلثين أ د هـ، أ ب جـ تساوي $\frac{٢}{٣}$.



**حاول أن تحل**

١١ في المثال (١١) إذا كان طول هـ جـ يساوي ٣ م، أوجد طول أ جـ.

أو = ١,٥ + ٢ + ٤,٦٧ = ٨,١٧ م

$$\frac{أ د}{أ و} = \frac{أ جـ}{أ هـ}$$

$$\frac{٣,٥}{٨,١٧} = \frac{أ جـ}{٣ + أ جـ}$$

٨,١٧ أ جـ = ٣,٥ × ٣ + ٣,٥ × أ جـ

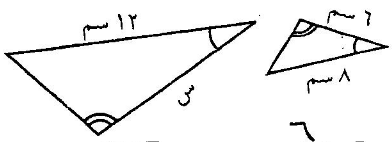
٤,٦٧ أ جـ = ١٠,٥ ∴ أ جـ = ٢,٢٥ سم

ص ١٤٦

تدريب (١)

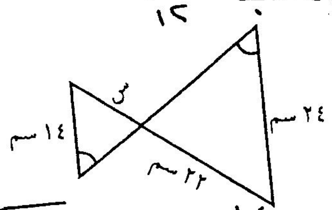
اكتب نسبة تشابه المثلثين، ثم أوجد قيمة س في كلٍّ مما يلي:

(أ) النسبة $\frac{١}{٢}$



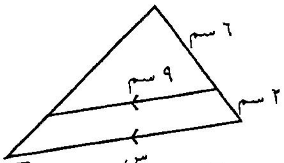

$\frac{٨}{س} = \frac{٦}{١٢}$ س = ١٦

(ب) النسبة $\frac{٧}{١٢}$




$\frac{س}{٢٢} = \frac{١٤}{٢٤}$ س = ١٢٫٨

(جـ) النسبة $\frac{٣}{٤}$

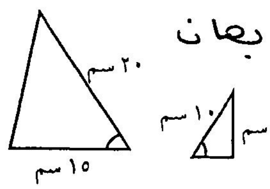



$\frac{٩}{س} = \frac{٦}{٨}$ س = ١٢

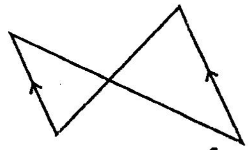
تدريب (٢)

اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وأيها يكونان فيها غير متشابهين. وفي حالة التشابه، اذكر النظرية التي تثبت تشابههما.

(أ) غير متشابهان

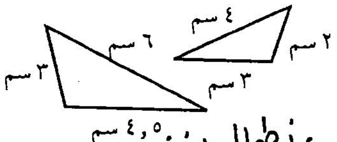



(ب) متشابهان



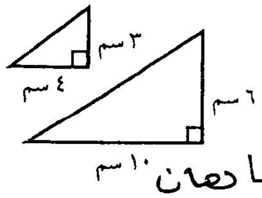
تطابق زاويتين

(جـ) متشابهان



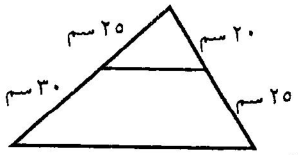

تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

(د)



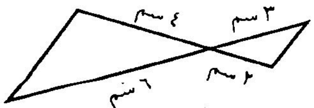

غير متشابهان

(هـ)



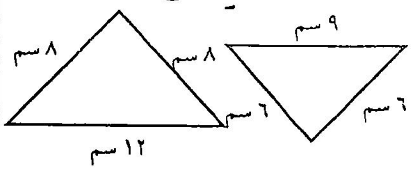

غير متشابهان

(و) متشابهان



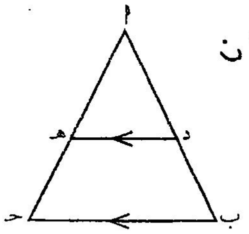

تطابق زاوية وتناسب ضلعين

(ز) متشابهان



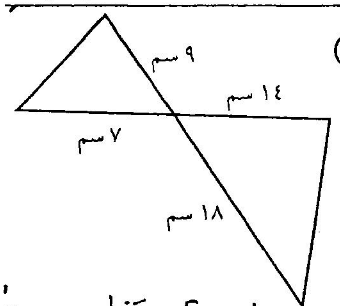

تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

(ح) متشابهان




تطابق زاويتين

(ط)




تطابق زاوية وتناسب ضلعين

# ٤ - ٣ التشابه في المثلثات القائمة الزاوية

٢ $\Delta$ أجـ د ~ $\Delta$ ب جـ أ (نظرية ١)

$\therefore \frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{جـ أ}}$

ومنها $(\text{أجـ})^2 = \text{جـ د} \times \text{جـ ب}$

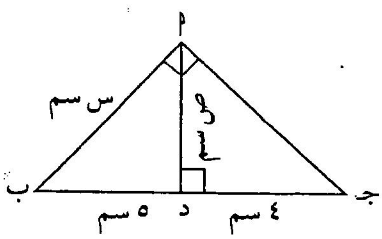
تدريب (٣)

$\Delta$ أب جـ مثلث قائم الزاوية أ ، $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

أثبت أن: أب × أجـ = أد × ب جـ

## مثال (١)

ص ١٥٠




أوجد س، ص بحسب المعطيات في الشكل.

المعطيات:

$\Delta$ أب جـ قائم الزاوية أ، $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إيجاد س، ص.

البرهان:

باستخدام نتائج النظرية (١):

$\text{س}^2 = ٥ \times (٥ + ٤) = ٤٥$

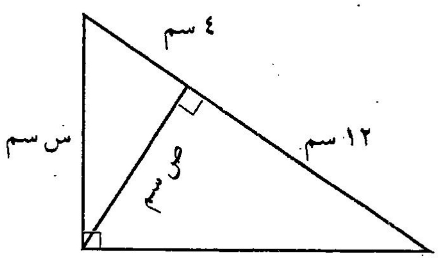
$\text{س} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$

$\text{ص}^2 = ٤ \times ٥$

$\text{ص} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

## حاول أن تحل

ص ١٥٠




(١) أوجد من الشكل المرسوم س، ص في أبسط صورة.

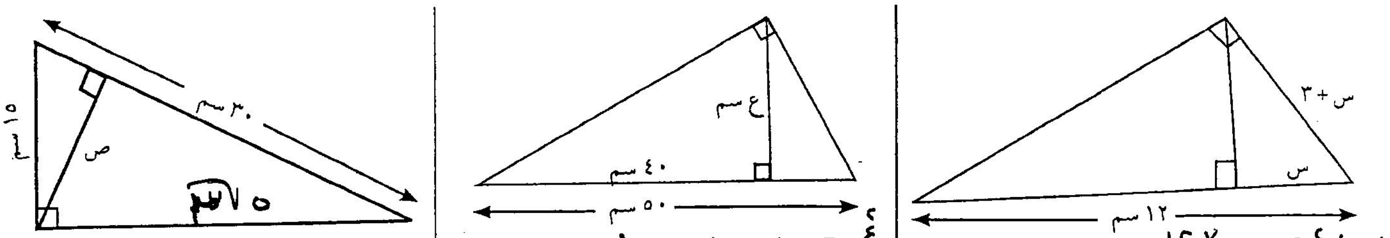
$\text{ص}^2 = ٤ \times ١٢ = ٤٨$   $\text{ص} = \sqrt{٤٨} = ٤\sqrt{٣}$

$\text{س}^2 = ٤ \times ١٦ = ٦٤$   $\text{س} = \sqrt{٦٤} = ٨$

ص ١٥٠

تدريب (~~٤~~ ٣)

أوجد قيمة س، ص، ع في أبسط صورة في كل من الحالات التالية:




$(س+٣)^2 = س \times ١٢$

$س^2 + ٦س + ٩ - ١٢س = ٠$

$س = ٣$

$ع^2 = ٤٠ \times ١٠ = ٤٠٠$

$ع = ٢٠$

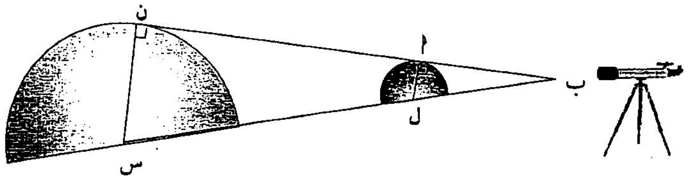
$٣٠ص = ١٥ \times ١٥\sqrt{٣}$

$ص = \frac{١٥}{٢}\sqrt{٣}$

## مثال (٢) تطبيقات حياتية

يراقب فلكي كسوف الشمس. ينمذج الشكل المقابل الحالة. يقف المراقب في ب.

النقاط س (مركز الشمس)، ل (مركز القمر)، ب على استقامة واحدة.




طول نصف قطر الشمس (ن س) = ٦٩٥ ٠٠٠ كم.

طول نصف قطر القمر (أ ل) = ١٧٣٦ كم.

ب س = ١٥٠ مليون كم.

أوجد ب ل (قرّب الإجابة لأقرب كم).

المعطيات:

المراقب، مركز القمر، مركز الشمس على استقامة واحدة.

طول نصف قطر الشمس (ن س) = ٦٩٥ ٠٠٠ كم

طول نصف قطر القمر (أ ل) = ١٧٣٦ كم

ب س = ١٥٠ مليون كم

المطلوب:

إيجاد طول $\overline{ب ل}$.

البرهان:

$\triangle$ب ل أ، $\triangle$ب س ن قائمي الزاوية في أ، ن على الترتيب، $\hat{ب}$ زاوية مشتركة.

$\therefore$ $\triangle$ب ل أ، $\triangle$ب س ن متشابهان

$\frac{ب ل}{ب س} = \frac{ل أ}{س ن}$ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

البرهان: ق(∠ن) = ق(∠م) = ٩٠°

ق(∠ب و ن) = ق(∠أ و م)

∴ △ ب ن و ~ △ أ و م

$\frac{أم}{و ب} = \frac{٢}{٤}$ ، أ و = $\frac{٢}{٤}$ و ب

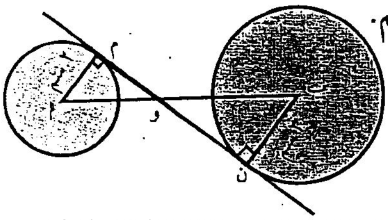
٨ − و ب = $\frac{٢}{٤}$ و ب ، ٨ = $\frac{٦}{٤}$ و ب

و ب = $\frac{١٦}{٣}$ ، و أ = $\frac{٨}{٣}$

$$\frac{ب ل}{١٥٠ ٠٠٠ ٠٠٠} = \frac{١٧٣٦}{٦٩٥ ٠٠٠}$$

ب ل = ٣٧٤ ٦٧٦,٢٥٩

تبلغ المسافة بين النقطة ب التي يقف عندها المراقب ومركز القمر حوالى ٣٧٤ ٦٧٦ كم.



**حاول أن تحل**

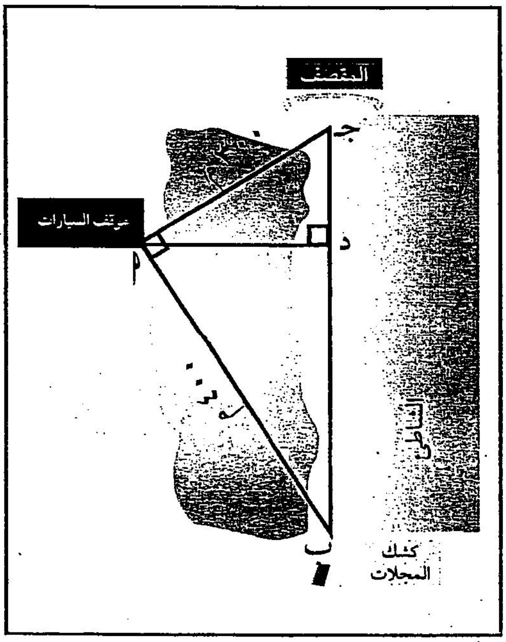
٢ في الشكل المقابل، أوجد طول كل من القطعتين $\overline{وأ}$، $\overline{وب}$ إذا كان طول $\overline{أب}$ = ٨ سم.

## مثال (٠) تطبيقات حياتية ص ١٥١

في إحدى الحدائق العامة، التي تقيمها الدولة على الشاطئ للترويح عن المواطنين، كان طول الممر المرصوف داخل الحديقة حتى المقصف يساوي ٣٠٠ م، وطول الممر حتى كشك المجلات ٤٠٠ م، وكان الممران يتقابلان في زاوية قائمة كما في الشكل أمام موقف السيارات. سار جاسم من موقف السيارات على مسار مستقيم عمودي على الشاطئ حتى وصل إلى الشاطئ. كم مترًا على جاسم أن يسير من مكانه على الشاطئ الذي وصل إليه ليشتري شطائر من المقصف؟

المعطيات:

أجـ = ٣٠٠ م، أب = ٤٠٠ م، ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°، $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$.




المطلوب:

إيجاد دجـ.

البرهان:

△أب جـ قائم الزاوية أ.

بتطبيق نظرية فيثاغورث

(ب جـ)$^{٢}$ = (٣٠٠)$^{٢}$ + (٤٠٠)$^{٢}$

(ب جـ)$^{٢}$ = ٢٥٠ ٠٠٠

ب جـ = ٥٠٠ م

بتطبيق نتائج التشابه

(أجـ)$^{٢}$ = جـ د × جـ ب

(٣٠٠)$^{٢}$ = جـ د × ٥٠٠

$$جـ د = \frac{٣٠٠ \times ٣٠٠}{٥٠٠} = ١٨٠$$

أي أن جاسم سيسير من مكانه ١٨٠ م ليصل إلى المقصف.

* (أد)$^{٢}$ = (٣٠٠)$^{٢}$ − (١٨٠)$^{٢}$ = ٥٧٦٠٠ أد = ٢٤٠ م

**حاول أن تحل** ص ١٥١

* أد × ٥٠٠ = ٣٠٠ × ٤٠٠ أد = ٢٤٠ م

٣ أ احسب أد المسافة من موقف السيارات إلى الشاطئ بطريقتين مختلفتين.

ب هل يمكنك حل المثال (٣) بطريقة أخرى؟

(أب)$^{٢}$ = ب د × ب جـ

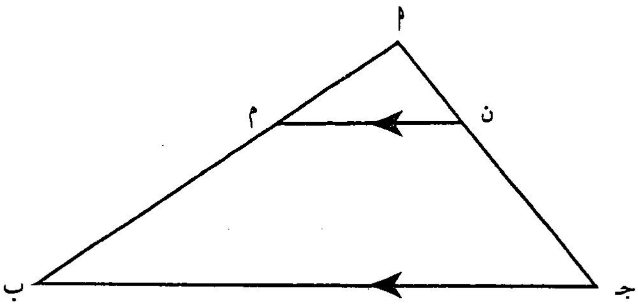
(٤٠٠)$^{٢}$ = ب د × ٥٠٠

∴ ب د = ٣٢٠ م

∴ جـ د = ١٨٠ م

## نظرية (١) نظرية المستقيم الموازي Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.




المعطيات: أب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ .

المطلوب: إثبات أن $\frac{\text{أم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أن}}{\text{ن جـ}}$ .

البرهان:

$\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

$\Delta$أجـ ب ~ $\Delta$أن م      لماذا؟

$\frac{\text{أجـ}}{\text{أن}} = \frac{\text{أب}}{\text{أم}}$

$\frac{\text{أن + ن جـ}}{\text{أن}} = \frac{\text{أم + م ب}}{\text{أم}}$

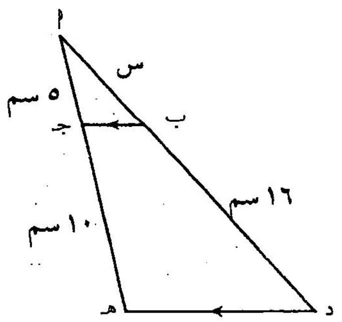
$١ + \frac{\text{ن جـ}}{\text{أن}} = ١ + \frac{\text{م ب}}{\text{أم}}$

$\frac{\text{ن جـ}}{\text{أن}} = \frac{\text{م ب}}{\text{أم}}$

$\therefore \frac{\text{أم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أن}}{\text{ن جـ}}$ .

**معلومة رياضية:**
إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$
فإن $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$
والعكس صحيح.

### مثال (١)




استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

المعطيات:

في المثلث أ د هـ، $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$

أجـ = ٥ سم ، جـ هـ = ١٠ سم ، ب د = ١٦ سم ، أب = س.

المطلوب: إيجاد س.

البرهان:

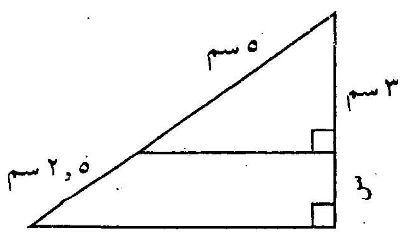
$\because$ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$ وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب:

$\frac{٥}{١٠} = \frac{\text{س}}{١٦}$      الأجزاء المتناسبة

١٠ س = ٨٠      باستخدام الضرب التقاطعي

س = ٨      بالقسمة على ١٠

### حاول أن تحل  ص ١٥٣

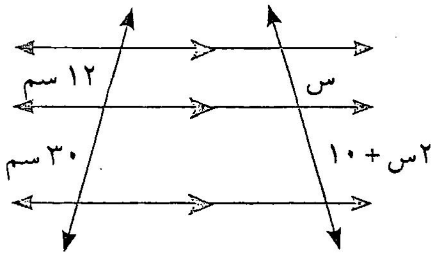



(١) في الشكل المقابل، استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

$\frac{٣}{\text{س}} = \frac{٥}{٢,٥}$ ← س = ١,٥ سم

ص ١٥٤

## مثال (٢)




من الشكل المقابل أوجد قيمة س.

المعطيات: لدينا مستقيمان غير متوازيين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية.

أطوال القطع الناتجة هي س، ٢س +١٠، ١٢، ٣٠ بالترتيب.

المطلوب: إيجاد قيمة س.

البرهان:

بما أن المستقيمين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية وباستخدام نظرية طاليس

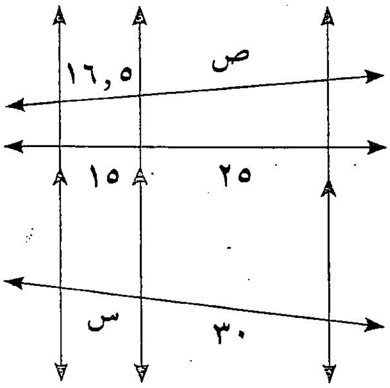
$$\frac{\text{س}}{\text{٢س} + ١٠} = \frac{١٢}{٣٠}$$

٣٠ س = ١٢(٢س + ١٠) الضرب التقاطعي

٣٠ س = ٢٤س + ١٢٠

٦س = ١٢٠

س = ٢٠ سم




### حاول أن تحل

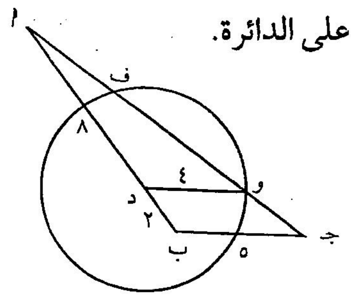
٢ أوجد في الشكل المقابل س، ص في أبسط صورة.

$\frac{\text{س}}{٣٠} = \frac{١٥}{٢٥}$ ∴ س = ١٨ ، $\frac{\text{ص}}{١٦,٥} = \frac{٢٥}{١٥}$ ص = ٢٧,٥

## مثال (٣) تجنب الخطأ ص ١٥٥

في الشكل المقابل: د مركز الدائرة، طول نصف قطر الدائرة = ٤ سم.

أب = ١٠ سم ، أد = ٨ سم ، ب جـ = ٥ سم ، و، ف نقطتان على الدائرة.




قال فهد: النقاط أ، د، ب على استقامة واحدة كذلك النقاط أ، و، جـ وبالترتيب نفسه.

∵ $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{\text{ود}}{\text{جـ ب}} = \frac{٤}{٥}$

∴ $\overline{\text{ود}} // \overline{\text{جـ ب}}$

أجابهُ سلطان: في هذه الحالة، $\overline{\text{ف د}}$، $\overline{\text{جـ ب}}$ متوازيتان أيضًا.

أ اشرح علام ارتكز سلطان في إجابته.

ب أين الخطأ في الحل الذي أعطاه فهد؟

ص ١٠٠

الحل:

**أ** كيف فكر سلطان:

∵ $\overline{\text{ف د}}$ نصف قطر في الدائرة.

∴ ف د = ٤ سم

∴ $\frac{\text{ف د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٥}$

أي أن $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{ف د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٥}$

واستنادًا على ما اقترحه فهد يكون $\overline{\text{ف د}} \parallel \overline{\text{جـ ب}}$ وهذا خطأ

**ب** يجب أن يكون $\overline{\text{و د}} \parallel \overline{\text{جـ ب}}$ (نظرية طاليس)

توازي المستقيمات يعطي قطعًا أطوالها متناسبة وليس العكس.

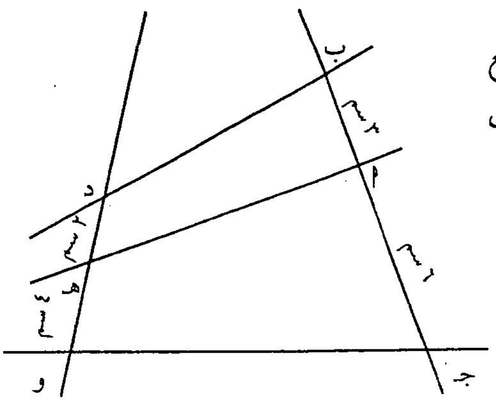
**حاول أن تحل** ص ١٠٠

(٣) في المثال (٣)، إذا كان أيضًا $\overline{\text{و د}} \parallel \overline{\text{جـ ب}}$، وجـ = ٣ سم، فأوجد طول $\overline{\text{أو}}$.

$\frac{\text{أو}}{\text{وجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{د ب}}$ $\frac{\text{أو}}{٣} = \frac{٨}{٢}$ أو = ١٢ سم

ملاحظة: ص ١٠٦

نستنتج من المثال (٣) أن عكس النظرية غير صحيح: إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس من الضروري أن تكون المستقيمات متوازية.




في الرسم: $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

بينما المستقيمات $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ ليست متوازية.

تدريب

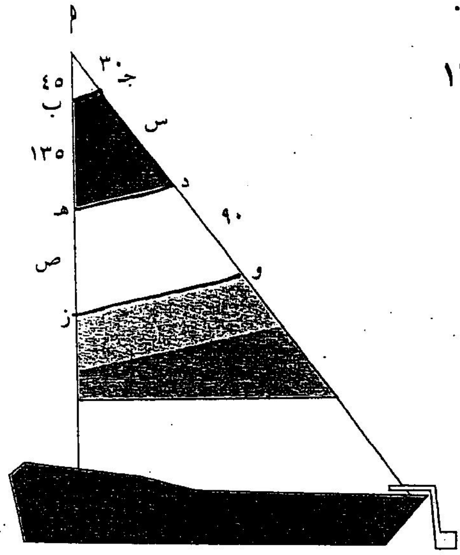
حل مثال (١١) في صفحة ١٢٩، باستخدام نظرية طاليس.

$\frac{\text{أد}}{\text{دو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{ب د}}$ $\frac{٣٫٥}{س} = \frac{١٫٥}{٢}$ ∴ س = ٤٫٦

ص ١٥٦

## مثال (٤) تطبيقات حياتية

تصميم أنماط لشراع المركب: يستخدم صانعو الأشرعة الحاسوب لتكوين نمط لكل شراع يصنعونه، ثم يرسمون مخططًا له بالطباشير على الأرضية التي يقصونه عليها. بعد أن يقطعوا إطارات الشراع، يحيكونها معًا لتكوين الشراع بأكمله. الخطوط المحاكاة تكون متوازية كما في الشكل حيث الأبعاد بالسنتيمتر. أوجد س، ص.




المعطيات: $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{و ز}}$، أجـ = ٣٠، دو = ٩٠، أب = ٤٥، ب هـ = ١٣٥

جـ د = س ، هـ ز = ص.

المطلوب:

إيجاد س، ص.

البرهان:

من توازي القطع المستقيمة واستنادًا إلى نظرية طاليس، نكتب التناسب:

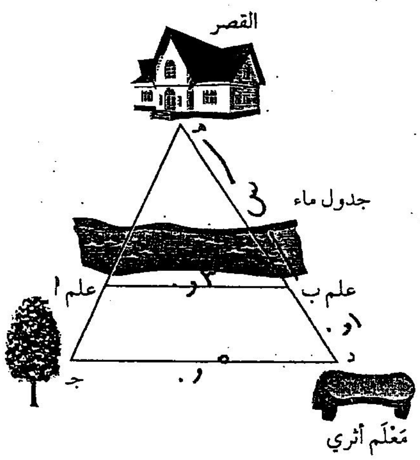
$\frac{٣٠}{س} = \frac{٤٥}{١٣٥}$ باستخدام نظرية طاليس

س = ٩٠

$\frac{ص}{١٣٥} = \frac{٩٠}{٩٠}$

∴ ص = ١٣٥ سم.

### حاول أن تحل ص ١٥٧




(٤) باستخدام نظام إشارة (طبوغرافيا)، وضع علمان عند النقطتين أ، ب كما في الشكل المقابل بحيث يكون $\overline{\text{أب}}$ // جـ د.

إذا كان أب = ٠,٣ كم، ب د = ٠,١ كم، دجـ = ٠,٥ كم.

فأوجد المسافة بين القصر هـ والمَعْلَم الأثري د.

$\frac{س}{س+٠,١} = \frac{٠,٣}{٠,٥}$

٠,٥ س = ٠,٣ س + ٠,٠٣

٠,٢ س = ٠,٠٣

س = ٠,١٥

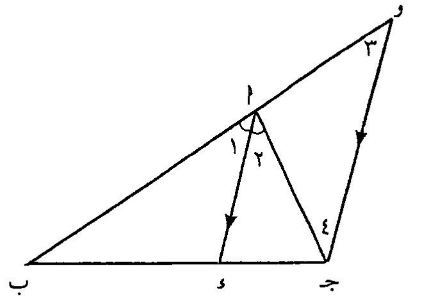
المسافة بين القصر و المعلم الأثري د = ٠,٢٥ كم

ص١٥٧

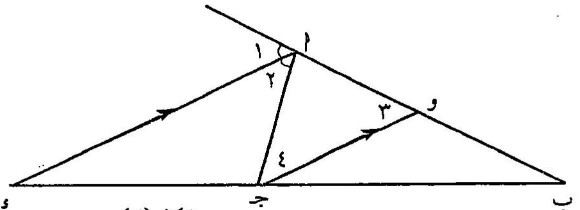
نظرية (٣) **نظرية منصف الزاوية في مثلث**

**إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.**

**المعطيات:** $\Delta$ ا ب جـ فيه، $\overleftarrow{\text{اد}}$ ينصف ب $\hat{\text{ا}}$ جـ من الداخل شكل (١)، ينصف الزاوية الخارجة عن المثلث عند ا شكل (٢).



شكل(١)



شكل (٢)

**المطلوب:** إثبات أن: $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$

**العمل:** نرسم $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ // $\overleftarrow{\text{د ا}}$ ويقطع $\overleftarrow{\text{ب ا}}$ في نقطة و.

**البرهان:** $\because$ $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ // $\overleftarrow{\text{د ا}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا و}}$ نظرية (١)

$\because$ $\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{د ا}}$

$\therefore$ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٣}$) بالتناظر ، ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٤}$) بالتبادل

$\because$ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$) $\therefore$ ق($\hat{٣}$) = ق($\hat{٤}$)

$\therefore$ ا و = ا جـ نظرية (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) $\therefore$ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$ .

ملاحظة: سنكتفي بدراسة الحالة التي ينصف فيها شعاع زاوية داخلية في مثلث.

**مثال (٥)** ص١٥٨

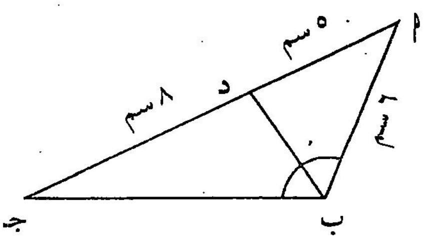
**أوجد جـ ب في الشكل المبيّن حيث $\overline{\text{ب د}}$ ينصف ا$\hat{\text{ب}}$جـ.**

**المعطيات:** $\overline{\text{ب د}}$ منصف ا$\hat{\text{ب}}$جـ.

ا ب = ٦ سم، ا د = ٥ سم،

جـ د = ٨ سم

**المطلوب:** إيجاد جـ ب.




**البرهان:**

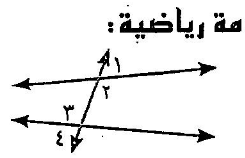
**في المثلث ا جـ ب، $\overline{\text{ب د}}$ منصف ا$\hat{\text{ب}}$جـ.**

$\therefore$ $\frac{\text{جـ د}}{\text{د ا}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ب ا}}$ نظرية منصف الزاوية

$\frac{٨}{٥} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ب ا}}$

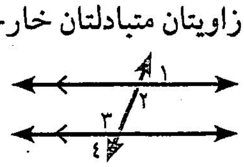
ب جـ = $\frac{٨ \times \text{ا ب}}{٥} = \frac{٨ \times ٦}{٥} = ٩,٦$ سم

**معلومة رياضية:**




($\hat{٢}$)، ($\hat{٣}$): زاويتان متبادلتان داخليًا

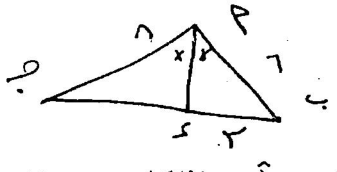
($\hat{١}$)، ($\hat{٤}$): زاويتان متبادلتان خارجيًا




ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٣}$): التوازي والتبادل الداخلي

ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٤}$): التوازي والتبادل الخارجي

**حاول أن تحل** ص١٥٨




(٥) ارسم مثلثًا ا ب جـ بحيث إن ا ب = ٦ سم، ا جـ = ٨ سم، ثم ارسم $\overline{\text{ا د}}$ منصف ب $\hat{\text{ا}}$ جـ. إذا كان ب د = ٣ سم، فأوجد جـ د.

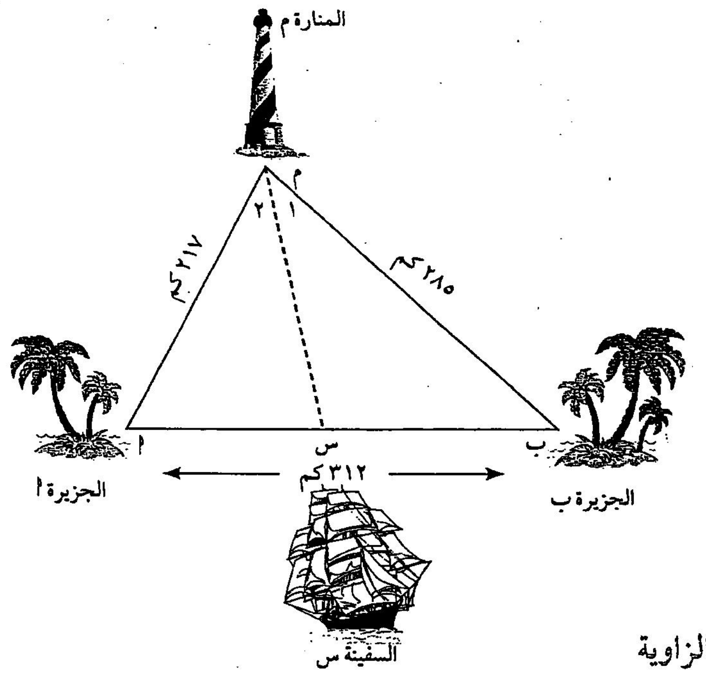
$\frac{٣}{\text{د جـ}} = \frac{٦}{٨}$ $\therefore$ د جـ = ٤ سم

ص ١٠٩

## مثال (٦)

تبيّن لمراقب موجود في المنارة (م) أن قياسي الزاويتين (١)، (٢) المكونتين من كل من الجزيرتين (أ)، (ب) والمنارة(م) والسفينة (س) متساويان.

أوجد بعد السفينة عن كل من الجزيرتين إذا كانت السفينة والجزيرتين على استقامة واحدة.




الحل:

المعطيات:

تكوّن المنارة والجزيرتان مثلثًا م أ ب أبعاده: م أ = ٢١٧،

م ب = ٢٨٥ ، أ ب = ٣١٢

المستقيم المار بالمنارة والسفينة ينصف الزاوية أ م̂ ب.

السفينة والجزيرتان على استقامة واحدة.

المطلوب:

إيجاد س أ ، س ب.

البرهان:

∵ $\overline{\text{م س}}$ منصف أ م̂ ب

∴ $\dfrac{\text{س أ}}{\text{س ب}} = \dfrac{\text{م أ}}{\text{م ب}}$ نظرية منصف الزاوية

$\dfrac{\text{س أ} + \text{س ب}}{\text{س ب}} = \dfrac{\text{م أ} + \text{م ب}}{\text{م ب}}$ من خواص التناسب

$\dfrac{٣١٢}{\text{س ب}} = \dfrac{٢١٧ + ٢٨٥}{٢٨٥}$

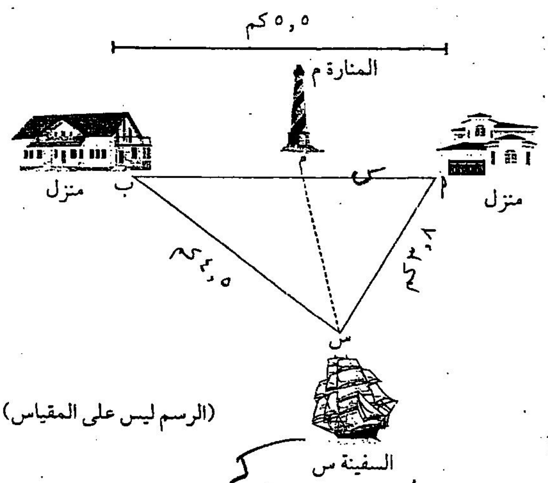
∴ $\text{س ب} = \dfrac{٣١٢ \times ٢٨٥}{٢١٧ + ٢٨٥} = ١٧٧$

$\text{س أ} = ٣١٢ - ١٧٧ = ١٣٥$

تبعد السفينة عن الجزيرة أ حوالى ١٣٥ كم وتبعد عن الجزيرة ب حوالى ١٧٧ كم.

### حاول أن تحل

ص ١٠٩




(الرسم ليس على المقياس)

٦ أوجد المسافة بين المنارة وكل من المنزلين إذا علمنا أن المنزلين والمنارة على استقامة واحدة، وأن المستقيم المار بالسفينة والمنارة ينصف الزاوية أ س̂ ب.

$\dfrac{٣,٨}{٤,٥} = \dfrac{س}{٥,٥ - س}$

٢,٨ − ٢,٩ = س ٤,٥

٢,٩ = س ٨,٢

م س ≃ ٢,٥ كم

م أ ≃ ٢,٥ كم

م ب ≃ ٣ كم

حاول ان تحل ص ١٦٢

① لدينا مثلثان متشابهان بنسبة $\frac{٢}{٣}$ . إذا كان محيط المثلث الأكبر ٤٥ سم ، فأوجد محيط المثلث الأصغر

الحل:
بفرض ان محيط المثلث الأصغر س

فيكون

$$\frac{\text{محيط المثلث الأصغر}}{\text{محيط المثلث الأكبر}} = \frac{٢}{٣}$$

$$\frac{س}{٤٥} = \frac{٢}{٣}$$

$$س = \frac{٢ \times ٤٥}{٣} = \frac{٩٠}{٣} = ٣٠ \text{ سم}$$

ص ١٦٣

لتكن أ، ب، جـ، د، هـ على التوالي أطوال أضلاع المضلع الثاني المناظرة للأطوال ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠ في المضلع الأول.

النسبة بين ضلعين متناظرين = النسبة بين محيطي المضلعين.

$\frac{٣}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ أ = ٤,٥ سم $\qquad \frac{٥}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ب = $\frac{١٥}{٢}$ = ٧,٥ سم

$\frac{٦}{جـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ جـ = ٩ سم $\qquad \frac{٨}{د} = \frac{٢}{٣}$ ∴ د = ١٢ سم

$\frac{١٠}{هـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ هـ = ١٥ سم

$\frac{٣}{٤} = \frac{جـ}{٦}$ ، جـ = ٤,٥ $\qquad \frac{٣}{٤} = \frac{ب}{٥}$ ، ب = ٣,٧٥ $\qquad \frac{٣}{٤} = \frac{أ}{٣}$ ، أ = ٢,٢٥

$\frac{٣}{٤} = \frac{هـ}{١٠}$ ، هـ = ٧,٥ $\qquad \frac{٣}{٤} = \frac{د}{٨}$ ، د = ٦

ص ١٦٢

محيط المضلع الثاني = ٢٤

النسبة بين المحيطين $\frac{٢٤}{٣٢} = \frac{٣}{٤}$

**حاول أن تحل**

٢ مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر ينقص محيطه ٨ سم عن محيط المضلع الأول. أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

**مثال (٣)**

ليكن لدينا دائرتان م، ن: الأولى طول نصف قطرها $نق_١$، والثانية طول نصف قطرها $نق_٢$.

أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

**المعطيات:**

دائرتان طول نصف قطر الأولى $نق_١$ وطول نصف قطر الثانية $نق_٢$.

**المطلوب:**

إيجاد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

**البرهان:**

نسبة التشابه = $\frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المحيطين = $\frac{٢\pi نق_١}{٢\pi نق_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المساحتين = $\frac{\pi(نق_١)^٢}{\pi(نق_٢)^٢} = \frac{(نق_١)^٢}{(نق_٢)^٢} = \left(\frac{نق_١}{نق_٢}\right)^٢$

**حاول أن تحل** ص ١٦٣

٣ دائرتان م، ن، طول نصف قطر الأولى = ٥ سم وطول نصف قطر الثانية = ٨ سم. أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

النسبة بين المحيطين = $\frac{٥}{٨}$

النسبة بين المساحتين = $\frac{٢٥}{٦٤}$

النسبة بين محيطي دائرتين تساوي نسبة التشابه بين الدائرتين.

النسبة بين مساحتي دائرتين تساوي مربع نسبة التشابه بين الدائرتين.

**مثال (٤)**

لدينا شكلان رباعيان متشابهان بنسبة تشابه $\frac{٥}{٤}$. إذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر ٣٠ سم$^{٢}$، فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر؟

المعطيات: رباعيان متشابهان.

نسبة التشابه = $\frac{٥}{٤}$ مساحة الشكل الرباعي الأكبر = ٣٠سم$^{٢}$

المطلوب: إيجاد مساحة الشكل الرباعي الأصغر.

البرهان: النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه

$$\frac{\text{مساحة الشكل الرباعي الأكبر}}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{١٦}$$

$$\frac{٣٠}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \frac{٢٥}{١٦}$$

مساحة الشكل الرباعي الأصغر = $\frac{١٦ \times ٣٠}{٢٥}$ = ١٩,٢ سم$^{٢}$.

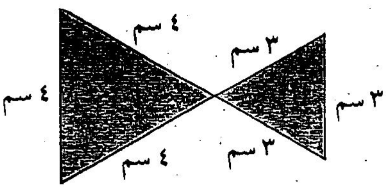
**حاول أن تحل** ص ١٦٤

نسبة التشابه = $\sqrt{\frac{١٦}{٩}} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣} = \frac{س}{٢٤}$

محيط المضلع الأكبر = ٣٢ سم

(٤) النسبة بين مساحتي مضلعين هي $\frac{١٦}{٩}$. ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر ٢٤ سم؟

**مثال (٥)** **تطبيقات حياتية**




رسم يوسف ربطة عنق على شكل عقدة فراشة. لاحظ أن قسمي الربطة غير متطابقين.

أوجد النسبة المئوية لمساحة المنطقة التي عليه أن يقطعها من المثلث الأكبر ليصبح القسمان متطابقين؟

الحل:

طريقة أولى للحل:

المثلثان كل منهما متطابق الأضلاع.

∴ المثلثان متشابهان

نسبة التشابه = $\frac{٣}{٤}$

∴ النسبة بين مساحتي المثلثين = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} = \frac{٩}{١٦}$

ص ١٦٥

إذا فرضنا أن مساحة $\Delta$ الأكبر = س

فإن مساحة $\Delta$ الأصغر = $\frac{\text{٩س}}{\text{١٦}}$

وعليه يكون الفرق بين المساحتين = س - $\frac{\text{٩س}}{\text{١٦}} = \frac{\text{٧}}{\text{١٦}}$ س

النسبة المئوية لمساحة المنطقة المطلوبة = $\dfrac{\frac{\text{٧}}{\text{١٦}}\text{س}}{\text{س}}$ × ١٠٠٪ = ٤٣,٧٥٪.

يجب أن يقطع ٤٣,٧٥٪ من مساحة المثلث الأكبر.

طريقة ثانية للحل:

مساحة المثلث الأصغر = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

= $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٣ × ٣ × جا ٦٠° لماذا؟

= $\frac{\text{٩}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}$ وحدة مربعة

مساحة المثلث الأكبر = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٤ × ٤ $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ وحدة مربعة

= ٤$\sqrt{\text{٣}}$ وحدة مربعة

الفرق بين مساحتي المثلثين = ٤$\sqrt{\text{٣}}$ - $\frac{\text{٩}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}$ وحدة مربعة

= $\frac{\text{٧}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}}$ وحدة مربعة

النسبة المئوية للفرق بين المساحتين = $\left(\frac{\text{٧}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}} \div \text{٤}\sqrt{\text{٣}}\right)$ × ١٠٠٪

= ٤٣,٧٥٪

**حاول أن تحل** ص ١٦٥

٥ هل تبقى النسبة المئوية دون تغيير إذا كان طول ضلع المثلث الأصغر ٤ سم، وطول ضلع المثلث الأكبر ٥ سم؟ فسّر إجابتك.

نسبة التشابه = $\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$

النسبة بين المساحتين = $\frac{\text{١٦}}{\text{٢٥}}$

النسبة المئوية = $\frac{\text{٩}}{\text{٢٥}}$ × ١٠٠٪ = ٣٦٪

تتغير النسبة المئوية

# الوحدة الخامسة

# المتتاليات

## (( ملخص لأهم قوانين الوحدة الخامسة ))

- في المتتالية الحسابية $ح_{ن+1} - ح_ن = د$ عدد ثابت يسمى أساس المتتالية.
- الحد النوني للمتتالية الحسابية $ح_ن = ح_1 + (ن-1)د$
- اذا كانت أ، ب، جـ متتالية حسابية فإن $ب = \frac{أ + جـ}{2}$
وهو الوسط الحسابي لـ أ، جـ
- في المتتالية الهندسية: $ح_{ن+1} \div ح_ن = ر$ عدد ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية.
- الحد النوني للمتتالية الهندسية $ح_ن = ح_1 ر^{ن-1}$
- اذا كانت أ، ب، جـ متتالية هندسية فإن $ب = \mp \sqrt{أ جـ}$
وهو الوسط الهندسي لـ أ، جـ
- مجموع ن حداً من متتالية حسابية:
$جـ_ن = \frac{ن}{2}(ح_1 + ح_ن)$ أو $جـ_ن = \frac{ن}{2}[2ح_1 + (ن-1) \times د]$

- مجموع ن حداً من متتالية هندسية:
$$جـ_ن = ح_1 \times \frac{ر^ن - 1}{ر - 1}$$
- مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى التي عددها ن $= \frac{ن \times (ن+1)}{2}$

الارتفاع بعد الاصطدام الأول = ٦,٠ × ١٠ = ٦ متر
〃 〃 〃 الثاني = ٦,٠ × ٦ = ٣,٦ متر
〃 〃 〃 الثالث = ٦,٠ × ٣,٦ = ٢,١٦ متر

**حاول أن تحل** ١٧١

١ سقطت كرة من ارتفاع ١٠ أمتار، وكانت ترتفع إلى ٦٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الثالث.

**هل تعلم:**
ليس من الضروري أن تكون جميع حدود المتتالية مختلفة. فمثلًا المتتابعة ٢، ٢، ٢، ٢... حيث $ح_ن = ٢$ جميع حدودها متساوية وهذه تسمى متتابعة ثابتة.

**معلومة رياضية:**
يستخدم الرمز $(ح_ن)$ للتعبير عن المتتابعة. بينما يعبر $ح_ن$ عن الحد النوني لهذه المتتابعة.

تدريب(١)

صف النمط التالي ثم أكمل بكتابة الحدود الثلاثة التالية:

أ ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، ٣، ١، $\frac{١}{٣}$

مثل الأنماط الرياضية السابقة تسمى متتابعات أو متتاليات ويمكننا إيجاد الحدود التالية باتباع قاعدة النمط.

اعتبر متتالية الأعداد في (أ):

| الحد الأول | الحد الثاني | الحد الثالث | الحد الرابع | | الحد النوني |
|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| $ح_١$ | $ح_٢$ | $ح_٣$ | $ح_٤$ | | $ح_ن$ |

$ح_١ = ٢$، $ح_٢ = ٤$، $ح_٣ = ٦$، $ح_٤ = ٨$، ....، ...

ويرمز إلى الحد النوني في المتتابعة بالرمز $ح_ن$ حيث $ن \in ص_+$ وهي تعبر عن رتبة الحد.

**تعريف:**
المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها، مرتبة على الصورة {١، ٢، ٣، ٤، ...، م} ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

ملاحظة: يمكن التعبير عن المتتالية بكتابة حدودها $(ح_١، ح_٢، ح_٣، ...)$

ويمكن الحصول على حدود المتتالية من صور عناصر مجال المتتالية.

ص ١٧٢



**مثال (٢)**

لتكن الدالة ت: {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ← ح حيث ت(ن) = $ن^٢$

بين في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

الحل:

ت دالة مجالها مجموعة جزئية مرتبة من $صـ_+$ وتبدأ بالعدد ١ وبالصورة {١، ٢، ٣، ...، م}.

∴ ت متتالية.

| ن | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| ت(ن) | ١ | ٤ | ٩ | ١٦ | ٢٥ |

حدود المتتالية هي: ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥

ص ١٧٢

**حاول أن تحل** ت دالة مجالها مجموعة جزئية مرتبة من $صـ_+$ ∴ ت متتالية

② لتكن الدالة ت : {١، ٢، ٣، ٤} ← ح حيث ت(ن) = $ن^٣ + ١$

| س | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|
| ص | ٢ | ٩ | ٢٨ | ٦٥ |

بيّن في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

حدود المتتالية هي: ٢، ٩، ٢٨، ٦٥.

تسمى المتتالية في مثال (٢) متتالية منتهية لأنه يمكن حصر عدد حدودها.

**مثال (٣)**

لتكن ت: $صـ_+$ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{١}{ن}$.

بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الثلاثة الأولى منها.

الحل:

ت دالة مجالها $صـ_+$ ∴ ت متتالية.

ت(١) = ١، ت(٢) = $\frac{١}{٢}$، ت(٣) = $\frac{١}{٣}$.

أي أنه يمكن كتابة المتتالية على الصورة $\left(١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}، ...\right)$

**حاول أن تحل** ص ١٧٢

③ لتكن ت: $صـ_+$ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{ن}{ن + ١}$.

بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

ت دالة مجالها $صـ_+$ ∴ ت متتالية $\left(\frac{١}{٢}، \frac{٢}{٣}، \frac{٣}{٤}، ...\right)$

ص ١٧٢

تسمى المتتالية في مثال (٣) متتالية غير منتهية لأن مجالها $ص_+$.

## الصيغة الارتدادية Recursive Formula

تعرف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة ويمكن اعتبارها حد عام للمتتالية.

في مثال (١) كان النمط ارتداديًا لأن ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام بالأرض يساوي ٨٠٪ من الارتفاع الذي يسبقه مباشرة.

الصيغة الارتدادية التي تصف ارتفاع الكرة هي $ح_ن = ٠,٨ \times ح_{ن-١}$ مع $ح_١ = ١٢,٥$ حيث ن عدد طبيعي أكبر من ١.

**مثال (٤)**

**أ** صف النمط الذي يسمح بإيجاد الحد التالي من المتتالية (٦، ١، -٤، -٩، ...).

**ب** أوجد الحدين الخامس والسادس ($ح_٥$، $ح_٦$) من هذه المتتالية.

> **ملاحظة:**
> في كل متتالية معرفة بالصيغة الارتدادية، يجب إعطاء الحد الأول (أو الحدود الأولى).

الحل:

**أ** نحصل على أي حد من المتتالية بطرح ٥ من الحد الذي يسبقه مباشرة.

١ = ٦ − ٥، −٤ = ١ − ٥، −٩ = −٤ − ٥ ∴ النمط ارتدادي

∴ الصيغة الارتدادية هي: $ح_ن = ح_{ن-١} - ٥$ مع $ح_١ = ٦$

**ب** بما أن $ح_٤ = -٩$، $ح_٥ = ح_٤ - ٥ = -٩ - ٥ = -١٤$،

$ح_٦ = ح_٥ - ٥ = -١٤ - ٥ = -١٩$.

**حاول أن تحل** ص ١٧٢

٤ اكتب الصيغة الارتدادية (الحد العام) مما يلي ثم أوجد الحد التالي: $ح_ن = ح_{ن-١} - ٢$ $ح_١ = ٤٣$

**أ** (−٢، −١، ٠، ١، ٢، ٣) $ح_ن = ح_{ن-١} + ١$ $ح_١ = -٢$ **ب** (٤٣، ٤١، ٣٩، ٣٧، ٣٥، ٣٣)

**ج** (٤٠، ٢٠، ١٠، ٥، $\frac{٥}{٢}$، $\frac{٥}{٤}$) $ح_ن = ح_{ن-١} \div ٢$ $ح_١ = ٤٠$ **د** ($\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$، $\frac{١}{٣٢}$، $\frac{١}{٦٤}$)

$ح_ن = ح_{ن-١} \times \frac{١}{٢}$ $ح_١ = \frac{١}{٢}$

متعلقة

## الصيغة الصريحة (الحد النوني للمتتالية) Explicit Formula

يمكنك أحيانًا معرفة قيمة الحد في متتالية دون معرفة الحد الذي يسبقه. بدلًا منه يمكنك استخدام عدد الحدود لحساب قيمة الحد. الصيغة التي تعبر عن الحد النوني بدلالة ن تسمى **صيغة صريحة**.

ص ١٧٤

## مثال (٥) الهندسة

يمثل الجدول التالي أطوال أضلاع المربعات ومحيطاتها.

| الحد | $ح_١$ | $ح_٢$ | $ح_٣$ | $ح_٤$ | $ح_٥$ | $ح_٦$ | $ح_٧$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| طول ضلع المربع | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | |
| المحيط | ٤ | ٨ | ١٢ | ١٦ | ٢٠ | ٢٤ | |

**أ** في كل متتالية، أوجد الحد التالي ($ح_٧$) والحد الرابع والعشرين ($ح_{٢٤}$).

**ب** اكتب صيغة صريحة لكل متتالية.

**الحل:**

**أ** في المتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع، كل حد يساوي قيمة رتبته، وبالتالي $ح_٧ = ٧$، $ح_{٢٤} = ٢٤$.

في المتتالية الخاصة بالمحيط، كل حد يساوي أربعة أمثال قيمة رتبته، وبالتالي $ح_٧ = ٤ \times ٧ = ٢٨$.

$ح_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ = ٩٦$.

**ب** الصيغة الصريحة للمتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع هي $ح_ن = ن$،

والصيغة الصريحة الخاصة بالمحيط هي: $ح_ن = ٤ن$.

### حاول أن تحل

١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ٣٦

٥ **أ** في المثال (٥) اكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية التي تبين مساحة المربع.

**ب** اكتب الصيغة الصريحة لهذه المتتالية. $ح_ن = ن^٢$

٦ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) لكل متتالية في ما يلي، ثم أوجد $ح_{١٢}$.

$ح_ن = ٣ن + ١$

**أ** (٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ...) $ح_{١٢} = ٣٧$

**ب** (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ...)

$ح_ن = ٤ن - ١$ $ح_{١٢} = ٤٧$

**ج** $\left(-٢\frac{١}{٢}، -١\frac{١}{٢}، -\frac{١}{٢}، ...\right)$

$ح_ن = -٣\frac{١}{٢} + ن$

$ح_{١٢} = -٣\frac{١}{٢} + ١٢ = ٨\frac{١}{٢}$

١٧٥

### مثال (٦)

اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ...).

الحل:

$ح_{١} = ٢ = ١^{٢} + ١$ $\qquad$ $ح_{٢} = ٥ = ٢^{٢} + ١$

$ح_{٣} = ١٠ = ٣^{٢} + ١$ $\qquad$ $ح_{٤} = ١٧ = ٤^{٢} + ١$

$ح_{٥} = ٢٦ = ٥^{٢} + ١$

الصيغة الصريحة هي $ح_{ن} = ن^{٢} + ١$.

#### حاول أن تحل

٧ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤، ...). $\quad ح_{ن} = ن^{٢} - ١$

### مثال (٧) صنع متتالية

لإيجاد ضلع من «رقعة كوش» **Koch snowflake**، استبدل كل ⊢——⊣ بـ ⊢⋀⊣.

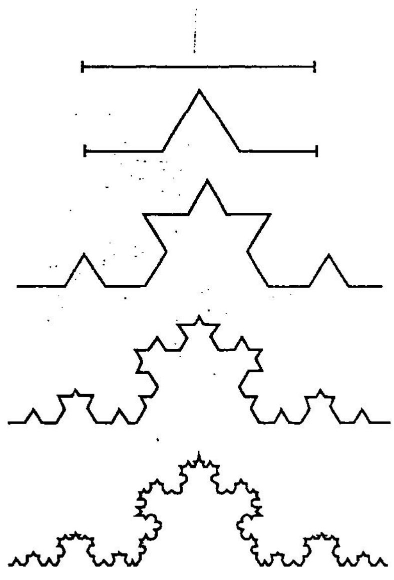
أ ارسم الأشكال الأربعة الأولى من النمط.

ب اكتب عدد القطع في كل شكل من أ أعلاه على صورة متتالية.

جـ توقع الحد التالي من المتتالية ثمّ فسّر اختيارك.

الحل:

أ



ب في الشكل الأول قطعة واحدة (١)

في الشكل الثاني ٤ قطع (٤)

في الشكل الثالث ١٦ قطعة (١٦)

في الشكل الرابع ٦٤ قطعة (٦٤)

∴ المتتالية (١، ٤، ١٦، ٦٤، ...)

جـ كل حد يساوي ٤ أمثال الحد السابق.

الحد التالي = ٤ × ٦٤ = ٢٥٦. يوجد ٢٥٦ قطعة في الشكل التالي أي الحد الخامس من المتتالية = ٢٥٦.

#### حاول أن تحل

٨ صف كل نمط وأوجد الحدود الثلاثة التالية.

أ ٢٧، ٣٤، ٤١، ٤٨، ...

$ح_{٥} = ٥٥$

$ح_{٦} = ٦٢$

$ح_{٧} = ٦٩$

$ح_{ن} = ٢٠ + ٧ن$

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، ...

$ح_{ن} = ٧٢٩ \div ٣^{ن}$

$ح_{٥} = ٣$

$ح_{٦} = ١$

$ح_{٧} = \frac{١}{٣}$



-١١٣-

ص ١٧٦

## مثال (٨) متتالية فيبوناتشي Fibonacci Sequence

الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي هي: $ف_{ن} = ف_{ن-٢} + ف_{ن-١}$ حيث $ف_{١} = ١$، $ف_{٢} = ١$.
استخدم الصيغة الارتدادية لإيجاد الحدود السبعة الأولى من المتتالية ثم اكتب المتتالية.

الحل:

$ف_{١} = ١$

$ف_{٢} = ١$

$ف_{٣} = ف_{١} + ف_{٢} = ١ + ١ = ٢$

$ف_{٤} = ف_{٢} + ف_{٣} = ١ + ٢ = ٣$

$ف_{٥} = ف_{٣} + ف_{٤} = ٢ + ٣ = ٥$

$ف_{٦} = ف_{٤} + ف_{٥} = ٣ + ٥ = ٨$

$ف_{٧} = ف_{٥} + ف_{٦} = ٥ + ٨ = ١٣$

∴ متتالية فيبوناتشي هي (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ...)

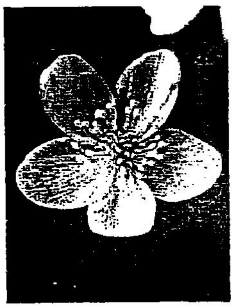
### حاول أن تحل

( ٢، ٢، ٤، ٦، ١٠، ...... )

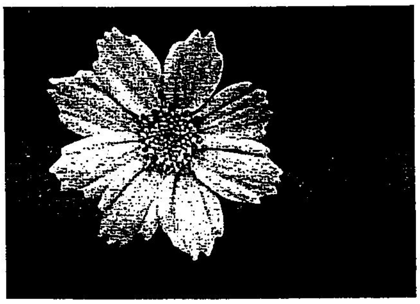
٩ اختر عددين متساويين غير العدد ١، ١ واكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتالية مشابهة لمتتالية فيبوناتشي.

غالبًا ما نجد أعداد فيبوناتشي في الطبيعة.

التريليوم
٣ بتلات: الحد الرابع



الحوذان الزاحف
٥ بتلات: الحد الخامس



زهرة البق
٨ بتلات: الحد السادس

بالنسبة إلى زهرة تباع الشمس، عند حساب عدد بتلاتها من الداخل إلى الخارج سنجدها: ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨،...

# المتتالية الحسابية
# Arithmetic Sequence

ص ١٧٧

**سوف تتعلم**

- المتتالية الحسابية وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الحسابية
- الأوساط الحسابية
- مجموع (ن) حدًا الأولى من حدود المتتالية الحسابية

**عمل تعاوني**

$ح_١ \leftarrow ٩$
$ح_٢ \leftarrow ١٤$
$ح_٣ \leftarrow ١٩$
$ح_٤ \leftarrow ٢٤$
$ح_٥ \leftarrow ٢٩$

١ (أ) أوجد الحد السادس من المتتالية المبينة جهة اليسار.

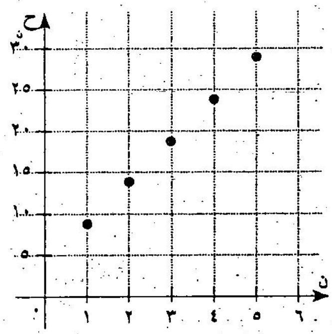
(ب) اكتب صيغة للحد السادس مستخدمًا الحد الخامس.

(ج) اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية.

٢ في المتتالية (٩، ١٤، ١٩، ٢٤، ٢٩، ...)، ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة هو مقدار ثابت.

(أ) كون متتاليتين، إحداهما بإضافة عدد ثابت والأخرى بطرح العدد الثابت نفسه من كل حد من حدود المتتالية الأصلية.

(ب) أوجد ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة في كل متتابعة حصلت عليها. ماذا تلاحظ.




(ج) ارسم في شكل بياني واحد العلاقة بين ن، $ح_ن$ للمتتالية الأصلية والمتتاليات التي حصلت عليها في (٢) - (أ). قارن بين الرسوم الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

**تعريف:**

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز ء. وعلى ذلك $ح_{ن+١} - ح_ن = ء$ أو $ح_{ن+١} = ح_ن + ء$.

**أي أنه يمكن الحصول على أي حد من حدود المتتالية الحسابية (بعد الحد الأول) وذلك بإضافة ء إلى الحد الذي يسبقه مباشرة.**

**مثال (١)**

**يبين أن المتتالية (٦، ١٢، ١٨، ٢٤) هي متتالية حسابية.**

**الحل:**

**١٢ - ٦ = ١٨ - ١٢ = ٢٤ - ١٨ = ٦**

**ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة يساوي ٦. لاحظ أن أساس المتتالية ء = ٦.**

**إذًا، المتتالية حسابية.**

**حاول أن تحل** ص ١٧٧

**١ هل المتتاليتان التاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك، فأوجد أساس كل منهما.**

(أ) المتتالية (٢، ٥، ٧، ١٢) ليست حسابية

(ب) المتتالية (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩) حسابية / د = ٤٥ - ٤٨ = -٣

ص ١٧٨

## مثال (٢)

إذا كان $ح_1 = ٥$، $ء = ٧$ في متتالية حسابية فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

الحل:

$ح_1 = ٥$

$ح_2 = ح_1 + ء = ٥ + ٧ = ١٢$

$ح_3 = ح_2 + ء = ١٢ + ٧ = ١٩$

الحدود الستة الأولى هي: ٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠

وتكون المتتالية: $(ح_ن)$ = (٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠، ...)

## حاول أن تحل

ص ١٧٨

(٢) إذا كان $ح_1 = ٤$، $ء = -٣$ في متتالية حسابية، فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

$ح_ن$ = (٤، ١، -٢، -٥، -٨، -١١، ...)

## الحد النوني للمتتالية الحسابية General Term of an Arithmetic Sequence

إذا كان الحد الأول في المتتالية الحسابية $(ح_ن)$ هو $ح_1$ وأساس المتتالية يساوي ء. واعتبرنا الحد النوني هو $ح_ن$،

فمن تعريف المتتالية الحسابية:

$ح_2 = ح_1 + ء$

$ح_3 = ح_1 + ٢ء$

$ح_4 = ح_1 + ٣ء$

**وبصفة عامة**

$ح_ن = ح_1 + (ن - ١)ء$ لكل $ن \in ص_+$.

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$، فإن $ح_ك = ح_1 + (ك - ١)ء$ : $ك \in ص_+$

ومنه يكون $ح_ن - ح_ك = (ن - ك)ء$

أي أن $ح_ن = ح_ك + (ن - ك)ء$

وتكون الصورة العامة للمتتالية الحسابية:

$(ح_1، ح_1 + ء، ح_1 + ٢ء، ...، ح_1 + (ن - ١)ء، ...)$

لاحظ أن $ء = \frac{ح_ن - ح_ك}{ن - ك}$ : $ن \neq ك$

**ملاحظة:**

ن تمثل رتبة الحد $ح_ن$ أما $ح_ن$ فتمثّل قيمة الحد، فمثلًا: $ح_7 = ٣٥$ تعني أن قيمة الحد السابع تساوي ٣٥.

ص ١٧٩

## مثال (٣)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (٨، ٦، ٤، ...).

الحل:

$ح_{١}$ = ٨، د = ٦ − ٨ = −٢

$ح_{١٠}$ = $ح_{١}$ + ٩د

$ح_{١٠}$ = ٨ + ٩ × (−٢) = −١٠ أي أن $ح_{١٠}$ = −١٠

$ح_{١٠٠}$ = $ح_{١}$ + ٩٩د

= ٨ + ٩٩ × (−٢)

= −١٩٠

أو

$ح_{١٠٠}$ = $ح_{١٠}$ + (١٠٠ − ١٠)د

= −١٠ + (١٠٠ − ١٠) × (−٢)

= −١٩٠

أي أن: $ح_{١٠٠}$ = −١٩٠

**حاول أن تحل** ص ١٧٩

٣ في المتتالية الحسابية $ح_{١}$ = ٤، د = ٣.

أوجد $ح_{١٢}$. $ح_{ن}$ = $ح_{١}$ + (ن − ١) × د $ح_{١٢}$ = ٤ + ١١ × ٣ = ٣٧

## مثال (٤)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ من المتتالية الحسابية (٧، ٩، ١١، ...).

الحل:

$ح_{١}$ = ٧، د = ٢، $ح_{ن}$ = ٩٩

$ح_{ن}$ = $ح_{١}$ + (ن − ١)د

٩٩ = ٧ + (ن − ١) × ٢

٩٢ = (ن − ١) × ٢

٤٦ = ن − ١ ن = ٤٧

أي أن الحد من المتتالية الحسابية الذي قيمته ٩٩ هو $ح_{٤٧}$.

**حاول أن تحل** ص ١٧٩

٤ (أ) في المتتالية الحسابية (٢، ٥، ٨، ١١، ...): أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١

(ب) أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية (٧، ١١، ١٥، ...، ٤٧).

(أ) $ح_{١}$ = ٢ د = ٣ $ح_{ن}$ = ٧١

$ح_{ن}$ = $ح_{١}$ + (ن − ١) × د

٧١ = ٢ + (ن − ١) × ٣

٦٩ = (ن − ١) × ٣

٢٣ = ن − ١

ن = ٢٤ $ح_{٢٤}$ = ٧١

$ح_{١}$ = ٧ د = ٤ $ح_{ن}$ = ٤٧

٤٧ = ٧ + (ن − ١) × ٤

٤٠ = ٤ × (ن − ١)

١٠ = ن − ١

ن = ١١

عدد حدود المتتالية = ١١

ص ١٨٠

## مثال (٥)

في المتتالية (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = ٧ن − ٣ لكل ن ∈ ص$_{+}$، أثبت أن المتتالية حسابية.

الحل:

ح$_{ن}$ = ٧ن − ٣

ح$_{ن+١}$ = ٧(ن + ١) − ٣ = ٧ن + ٤

ح$_{ن+١}$ − ح$_{ن}$ = (٧ن + ٤) − (٧ن − ٣) = ٧

= مقدارًا ثابتًا

∴ المتتالية (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = ٧ن − ٣ متتالية حسابية.

### حاول أن تحل

ص ١٨٠

٥ في المتتالية (ح$_{ن}$) حيث ح$_{ن}$ = ٣ن + ٥: ن ∈ ص

أثبت أن المتتالية حسابية.

ح$_{ن+١}$ = ٣(ن+١) + ٥

ح$_{ن+١}$ = ٣ن + ٣ + ٥ = ٣ن + ٨

ح$_{ن+١}$ − ح$_{ن}$ = ٣ن + ٨ − ٣ن − ٥ = ٣ = مقدار ثابت

المتتالية ح$_{ن}$ متتالية حسابية

## مثال (٦)

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥، فأوجد أساس المتتالية.

الطريقة الأولى

ح$_{ن}$ = ح$_{١}$ + (ن − ١)ء

ح$_{٥}$ = ح$_{١}$ + ٤ء

∴ ح$_{١}$ + ٤ء = ٩ (١)

ح$_{٨}$ = ح$_{١}$ + ٧ء

∴ ح$_{١}$ + ٧ء = ١٥ (٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ ٣ء = ٦

∴ ء = ٢

الطريقة الثانية

ح$_{ن}$ = ح$_{ك}$ + (ن − ك)ء

ح$_{٥}$ = ٩، ح$_{٨}$ = ١٥

ح$_{٨}$ − ح$_{٥}$ = (٨ − ٥) × ء

١٥ − ٩ = ٣ء

∴ ٦ = ٣ء

∴ ء = ٢

ح$_{ن}$ = ح$_{١}$ + (ن − ١) × د

ح$_{٢}$ = ٩ = ح$_{١}$ + د ①

ح$_{٦}$ = −٣ = ح$_{١}$ + ٥د ②

بالطرح

١٢ = −٤د

$\boxed{\text{د = −٣}}$

إذًا، أساس المتتالية الحسابية هو ٢.

### حاول أن تحل

ص ١٨٠

٦ إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد السادس يساوي −٣، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها. المتتالية = (١٢، ٩، ٦، ٣، ...)

ص ١٨١

## مثال (٧)

**بفرض أنك تشارك في سباق دراجات لدعم مشروع خيري. على المتسابق الأول تأمين مبلغ ٥ دنانير. وكل متسابق تالي يؤمن مبلغ يزيد ٥ , ١ دينارًا عن المتسابق الذي يسبقه مباشرةً. ما المبلغ الذي سيدفعه المتسابق الخامس والسبعون؟**

الحل:

$ح_١ = ٥$ ، $ح_٢ = ٦,٥$ ، $ح_٣ = ٨$ ، ... لماذا؟

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$ استخدام الصيغة الصريحة

$ح_{٧٥} = ٥ + (٧٥ - ١) \times ١,٥$ التعويض

$ح_{٧٥} = ٥ + ٧٤ \times ١,٥$

$= ١١٦$

سيدفع المتسابق الخامس والسبعون ١١٦ دينارًا.

$ح_١ = ١٥$ $د = ١١ - ٥ = ٦$

$ح_ن = ح_١ + (ن - ١) \times د$

$ح_{٢٥} = ١٥ + ٢٤ \times ٦ = ١٦٩$

**حاول أن تحل** ص ١٨١

٧ استخدم الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الخامس والعشرين ($ح_{٢٥}$) من المتتالية الحسابية (٥، ١١، ١٧، ٢٣، ٢٩، ...).

## الأوساط الحسابية ص ١٨١ Arithmetic Means

إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية حيث أ، ب، جـ هي عناصر من ح (أعداد حقيقية):

فإن: ب − أ = جـ − ب

٢ب = جـ + أ

$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$

أي أن ب هو الوسط الحسابي للعددين أ، جـ.

## مثال (٨)

**إذا كانت (٨٤، س، ١١٠) متتالية حسابية، فأوجد قيمة س.**

الحل:

الحد س هو الوسط الحسابي بين ٨٤، ١١٠.

$س = \frac{٨٤ + ١١٠}{٢} = ٩٧$

**حاول أن تحل** ص ١٨١

٨ أوجد قيمة ص من المتتالية الحسابية (٤٣، ص، ٥٧). $ص = \frac{٤٣ + ٥٧}{٢} = ٥٠$

١٨٢

بصورة عامة

إذا كانت (أ، ب، جـ، د، ...، ف، ص) متتالية حسابية فإن ب، جـ، د، ...، ف تسمى أوساطًا حسابية للعددين أ، ص.

وتسمى عملية إيجاد الأوساط الحسابية إدخال أوساط حسابية بين العددين أ، ص.

**مثال (٩)**

أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٢٣، ٦٥.

الحل:

(٢٣، ■، ■، ■، ■، ■، ٦٥).

$ح_١$ = ٢٣، عدد الحدود: ٥ + ٢ = ٧، $ح_٧$ = ٦٥.

إذًا $ح_٧ = ح_١ + ٦ء$

٦ء + ٢٣ = ٦٥

٦ء = ٤٢

ء = ٧

الأوساط الحسابية هي ٣٠، ٣٧، ٤٤، ٥١، ٥٨.

**حاول أن تحل** ١٨٢

(٩) **أ** أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين -٩، ٣.

**ب** أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١٣، ١.

(أ) $ح_١ = -٩$ $ح_٥ = ٣$

$ح_ن = ح_١ + (ن-١) د$

٣ = -٩ + ٤ د

١٢ = ٤ د

$\boxed{د = ٣}$

الأوساط هي: -٦، -٣، ٠

(ب) $ح_١ = ١٣$ $ح_٧ = ١$

$ح_ن = ح_١ + (ن-١) د$

١ = ١٣ + ٦ × د

-١٢ = ٦ د

$\boxed{د = -٢}$

الأوساط هي: ١١، ٩، ٧، ٥، ٣

## مجموع ن حدا الأولى من حدود متتالية حسابية

## Sum of The First n Terms of an Arithmetic Sequence

مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية ($ح_ن$) يعطى بالقاعدة:

$\boxed{جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)}$ أو $\boxed{جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن-١)ء]}$

حيث $ح_ن$ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول $ح_١$.



-١٢٠-

١٨٣ ص

### البرهان

ليكن ء أساس المتتالية.

$جـ_ن = ح_١ + (ح_١ + ء) + (ح_١ + ٢ء) + ... + (ح_ن - ٢ء) + (ح_ن - ء) + ح_ن$

$جـ_ن = ح_ن + (ح_ن - ء) + (ح_ن - ٢ء) + ... + (ح_١ + ٢ء) + (ح_١ + ء) + ح_١$

$٢جـ_ن = (ح_١ + ح_ن) + (ح_١ + ح_ن) + (ح_١ + ح_ن) + ... + (ح_١ + ح_ن)$ بالجمع

$٢جـ_ن = ن(ح_١ + ح_ن)$ ن حدًّا

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن) \quad (١)$ لكن $جـ_ن = ح_١ + (ن - ١)د$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[ح_١ + ح_١ + (ن - ١)ء]$ بالتعويض

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[(٢ح_١) + (ن - ١)ء] \quad (٢)$

القانون (١) يعطي مجموع حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير

القانون (٢) يعطي مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والأساس ء

**مثال (١٠)**

**أوجد مجموع العشرين حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية التي حدها الأول ١٠ وحدها العشرون ٥٠٠.**

الحل:

$ح_١ = ١٠، \quad ح_{٢٠} = ٥٠٠، \quad ن = ٢٠$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}(١٠ + ٥٠٠) = ٥١٠٠$

**حاول أن تحل** ١٨٣ ص

١٠ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول -١٢ وحدها العاشر ٢٤.

$ح_١ = -١٢ \quad ح_{١٠} = ٢٤$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$

$جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}(-١٢ + ٢٤) = ٦٠$

١٨٤

### مثال (١١)

أوجد مجموع الستة عشر حدًّا الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ١٥ وأساسها ٧.

الحل:

ح١ = ١٥، ء = ٧، ن = ١٦

جـن = ن/٢ [٢ح١ + (ن − ١)ء]

جـ١٦ = ١٦/٢ (٢ × ١٥ + ١٥ × ٧)

جـ١٦ = ٨(٣٠ + ١٠٥)

جـ١٦ = ١٠٨٠

(أ) جـ٢٥ = ؟   ح١ = −٧   ء = ٤

جـن = ن/٢ [٢ح١ + (ن − ١)ء]

جـ٢٥ = ٢٥/٢ [٢ × −٧ + ٢٤ × ٤] = ١٠٢٥

(ب) ح١ = ٥   ء = ٢   حن = ٩٥

حن = ح١ + (ن − ١)ء

٩٥ = ٥ + (ن − ١) × ٢

٩٠ = (ن − ١) × ٢

٤٥ = ن − ١

ن = ٤٦ عدد الحدود ٤٦

جـن = ن/٢ [ح١ + حن]

جـ٤٦ = ٤٦/٢ [٥ + ٩٥]

= ٢٣٠٠

**حاول أن تحل** ١٨٤

١١ (أ) متتالية حسابية حدها الأول −٧ وأساسها ٤. أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حدًّا منها.

(ب) أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ...، ٩٥).

### مثال (١٢)

كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (١٠، ١٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٤٥٠؟

الحل:

ح١ = ١٠، ء = ٥، جـن = ٤٥٠

جـن = ن/٢ [٢ح١ + (ن − ١)ء]

٤٥٠ = ن/٢ [٢٠ + (ن − ١)٥]

٤٥٠ = ن/٢ (١٥ + ٥ن)

٩٠٠ = ١٥ن + ٥ن²

ن² + ٣ن − ١٨٠ = ٠

(ن + ١٥)(ن − ١٢) = ٠

ن = −١٥، ن = ١٢

وحيث إن ن = −١٥ مرفوض لأن −١٥ ∉ ص+

∴ ن = ١٢ أي أن عدد الحدود المطلوبة هو ١٢ حدًّا.

ص ١٨٥

(أ) $أ_١ = ٥$ ، $د = ٣$ ، $جـ_ن = ٩٤٨$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ_١ + (ن-١)د]$

$٩٤٨ = \frac{ن}{٢}[٢ \times ٥ + ٣(ن-١)]$

$(٣ن + ٧٩)(ن - ٢٤) = ٠$

$ن = ٢٤$ يلزم ٢٤ حداً

(ب) $أ_١ = ٣٠$ ، $د = -٥$ ، $جـ_ن = ١٠٠$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ_١ + (ن-١)د]$

$١٠٠ = \frac{ن}{٢}[٢ \times ٣٠ + (ن-١) \times -٥]$

$٢٠٠ = ٦٥ن - ٥ن^٢$

$ن^٢ - ١٣ن + ٤٠ = ٠$ يلزم ٥ حدود

$(ن - ٥)(ن - ٨) = ٠$ أو ٨ حدود

## حاول أن تحل

١٢ أ) كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨؟

ب) كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (٣٠، ٢٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٠٠؟

## مثال (١٣)

أراد فهد حفر بئر في مزرعته. تبلغ كلفة حفر المتر الأول ٧ دنانير، وتزيد كلفة حفر كل متر دينارين عن كلفة حفر المتر السابق. دفع فهد للمتعهد ٤٣٢ دينارًا. ما عمق البئر الذي حفر؟

الحل: بما أن الزيادة ثابتة وهي ديناران، إذًا المتتالية حسابية. ليكن $جـ_ن$ المبلغ المدفوع لقاء حفر ن متر.

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١) \times ٢]$

$٤٣٢ = \frac{ن}{٢}(٢ \times ٧ + ٢ن - ٢)$

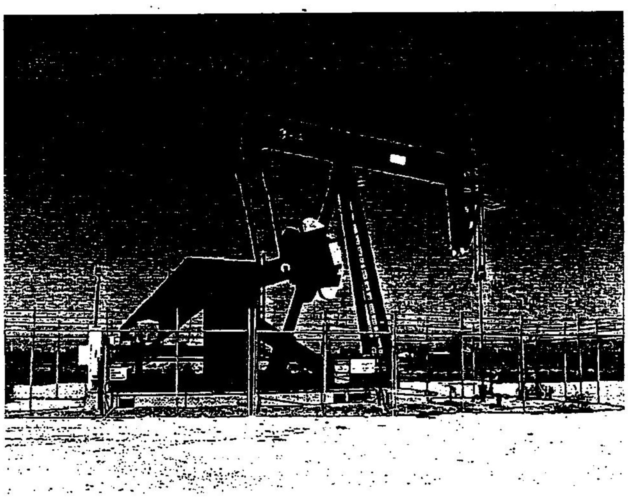
$٤٣٢ = ٦ن + ن^٢$

أي $ن^٢ + ٦ن - ٤٣٢ = ٠$

$(ن + ٢٤)(ن - ١٨) = ٠$

$ن = -٢٤$ (مرفوض)، $ن = ١٨$

يبلغ عمق البئر ١٨ مترًا.



## حاول أن تحل

ص ١٨٥

١٣ في المثال (١٣)، كم ستبلغ كلفة الحفر بالدينار إذا بلغ عمق البئر ٢٥ مترًا؟

$أ_١ = ٧$ ، $د = ٢$ ، $ن = ٢٥$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ_١ + (ن-١) \times د]$

$جـ_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢}[٢ \times ٧ + ٢٤ \times ٢]$

$= ٧٧٥$ دينار

المتتالية الهندسية
١٨٧

فمثلًا، المتتالية (٥، ١٠، ٢٠، ٤٠) متتالية هندسية.

أما (٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ...) فليست متتالية هندسية.

لماذا لا يمكن لأي حد في المتتالية الهندسية أن يساوي الصفر؟

**مثال (١)**

**لتكن $(ح_ن)$ متتالية حيث $ح_ن = ٣^ن$.**

**أ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية $(ح_ن)$.**

**ب أثبت أن $(ح_ن)$ متتالية هندسية.**

**الحل:**

**أ** $ح_١ = ٣^١ = ٣$ $\qquad$ $ح_٢ = ٣^٢ = ٩$

$ح_٣ = ٣^٣ = ٢٧$ $\qquad$ $ح_٤ = ٣^٤ = ٨١$

$ح_٥ = ٣^٥ = ٢٤٣$ $\qquad$ **الحدود الخمسة الأولى هي: ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣.**

**∴ المتتالية $(ح_ن) = (٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...)$**

**ب** $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣^{ن+١}}{٣^ن} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$ **مقدار ثابت.**

**∴ المتتالية هندسية.**

**حاول أن تحل** ١٨٧

**١ أثبت أن المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = (٢)^ن$ هي متتالية هندسية.**

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢^{ن+١}}{٢^ن} = ٢^{ن+١-ن} = ٢$ ثابت

∴ المتتالية هندسية.

**الحد النوني للمتتالية الهندسية** General term of an Geometrie Sequence

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية أساسها $ر \neq ٠$ فإن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

حيث $ح_١$ هو الحد الأول، $ح_ن$ هو الحد النوني، $ر$ هو أساس المتتالية الهندسية.

ويكون $ح_٢ = ح_١ \times ر$، $\qquad ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$، $\qquad ح_٤ = ح_١ \times ر^٣$، ...

وتكون الصورة العامة للمتتالية الهندسية $ح_١، ح_١ ر، ح_١ ر^٢، ح_١ ر^٣، ...، ح_١ ر^{ن-١}، ...$

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$ فإن $ح_ك = ح_١ \times ر^{ك-١}$

ومنه يكون $\frac{ح_ن}{ح_ك} = \frac{ح_١ \times ر^{ن-١}}{ح_١ \times ر^{ك-١}} = ر^{ن-ك}$

أي أن $ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$

ص ١٨٨

## مثال (٢)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.

الحل:

$\text{ح}_1 = ٩$ ، $\text{ر} = ٣$

$\text{ح}_2 = \text{ح}_1 \times \text{ر} = ٩ \times ٣ = ٢٧$

$\text{ح}_3 = \text{ح}_1 \times \text{ر}^2 = ٩ \times ٣^2 = ٨١$

$\text{ح}_4 = \text{ح}_1 \times \text{ر}^3 = ٩ \times ٣^3 = ٢٤٣$

$\text{ح}_5 = \text{ح}_1 \times \text{ر}^4 = ٩ \times ٣^4 = ٧٢٩$

∴ الحدود الخمسة الأولى هي: ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ٧٢٩

### حاول أن تحل

ص ١٨٨

(٢) اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ وأساسها −٣.

٥ ، −١٥ ، ٤٥ ، −١٣٥

## مثال (٣)

متتالية هندسية حدها الأول ٤ وحدها السادس ١٢٨ . اكتب المتتالية الهندسية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

الحل:

الحد الأول: $\text{ح}_1 = ٤$ ، الحد السادس: $\text{ح}_6 = ١٢٨$

نعلم أن $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_1 \times \text{ر}^{\text{ن}-1}$

$\text{ح}_6 = \text{ح}_1 \times \text{ر}^5$

$١٢٨ = ٤ \times \text{ر}^5$

$\text{ر}^5 = ٣٢$ ∴ $\text{ر} = ٢$

∴ الحدود الأربعة الأولى هي: ٤، ٨، ١٦، ٣٢.

المتتالية هي: (٤، ٨، ١٦، ٣٢، ...)

### حاول أن تحل

ص ١٨٨

(٣) متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{1}{3}$ . اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الخمسة الأولى منها.

$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{ر}^{\text{ن}-1}$

$\frac{1}{3} = ٢٧ \times \text{ر}^4$ $\qquad \frac{1}{81} = \text{ر}^4$ $\qquad \text{ر} = \frac{1}{3}$

= (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، ...)

**مثال (٤)**

متتالية هندسية حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأول والثاني ٣٦، وحدها الثالث يساوي ٣. أوجد الحد الخامس.

الحل:

$ح_1 + ح_2 = ٣٦ ،\ ح_3 = ٣$

في المتتالية الهندسية : $ح_ن = ح_1 \times ر^{ن-1}$

$\therefore ح_1 + ح_1 ر = ٣٦$

$ح_1 (١ + ر) = ٣٦$

$ح_3 = ح_1 ر^2 = ٣$

بالقسمة $\dfrac{ح_1 ر^2}{ح_1 (١ + ر)} = \dfrac{٣}{٣٦}$

$\dfrac{ر^2}{١ + ر} = \dfrac{١}{١٢}$

$١٢ ر^2 = ر + ١$ الضرب التقاطعي

$١٢ ر^2 - ر - ١ = ٠$

$(٤ ر + ١)(٣ ر - ١) = ٠$

$ر = -\dfrac{١}{٤}$ (مرفوض لأن الحدود موجبة) أو $ر = \dfrac{١}{٣}$.

$ح_5 = ح_3 \times ر^2$

$= ٣ \times \left(\dfrac{١}{٣}\right)^2 = \dfrac{١}{٣}$.

الحد الخامس $= \dfrac{١}{٣}$.

**حاول أن تحل** ١٨٥١

(٤) $(ح_ن)$ متتالية هندسية، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨.

أوجد الحد الأول والحد الخامس منها.

$ح_1 + ح_2 = ح_1 + ح_1 ر = ٢$

$ح_1 (١ + ر) = ٢$ *

$ح_4 + ح_3 = ح_1 ر^3 + ح_1 ر^2$

$= ح_1 ر^2 (١ + ر) = ٨$

بالقسمة $ر^2 = ٤$

ا) $ر = ٢$

$ح_1 (١ + ٢) = ٢$

$ح_1 \times ٣ = ٢$

$\boxed{ح_1 = \dfrac{٢}{٣}}$

$ح_5 = ح_1 \times ر^4$

$ح_5 = \dfrac{٢}{٣} \times ٢^4 = \dfrac{٣٢}{٣}$

ب) $ر = -٢$

$ح_1 (١ - ٢) = ٢$

$-ح_1 = ٢$

$\boxed{ح_1 = -٢}$

$ح_5 = ح_1 \times ر^4$

$ح_5 = -٢ \times (-٢)^4 = -٣٢$

الحل:

عدد البكتيريا بعد مرور ساعة واحدة = $ح_١$ = ٨

عدد البكتيريا بعد مرور ساعتين = $ح_٢$ = ٨ × ٨

عدد البكتيريا بعد مرور ٣ ساعات = $ح_٣$ = ٨ × (٨ × ٨) = ٨ $(٨)^٢$

... وهكذا

يشكل تكاثر البكتيريا متتالية هندسية أساسها ٨ وحدها الأول ٨.

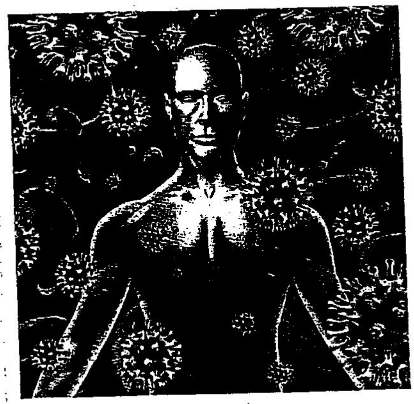
الحد النوني لها هو:

$ح_ن = ح_١ × (٨)^{ن-١}$

عدد البكتيريا بعد مرور ١٠ ساعات = $ح_{١٠}$ = ٨ × $(٨)^٩$

= ١٠٧٣٧٤١٨٢٤

أي حوالى مليار و٧٤ مليون بكتيريا.



**ملاحظة:**

عدد البكتيريا بعد مرور الـ ٢٠ دقيقة الأولى = ٢

عدد البكتيريا بعد مرور الـ ٢٠ دقيقة الثانية = ٤

عدد البكتيريا بعد مرور الـ ٢٠ دقيقة الثالثة = ٨

**حاول أن تحل**

٦ إذا كانت البكتيريا الواحدة تتكاثر بالانقسام كل ١٥ دقيقة، فكم يصبح عددها في جسم الإنسان بعد ١٢ ساعة؟

$ح_{١٢} = ١٦ × ١٦^{١١} = ٢,٨ × ١٠^{١٤}$

## الأوساط الهندسية بين عددين Geometric Means Between two Numbers

إذا كوَّنت أ، ب، جـ متتالية هندسية حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية وحيث أجـ > ٠ فإن: $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ ومنه $ب^٢$ = أجـ

∴ ب = ± $\sqrt{أجـ}$.

تسمى ب وسطًا هندسيًّا بين العددين أ، جـ، أي أن: $\sqrt{أجـ}$ أو $-\sqrt{أجـ}$ وسطًا هندسيًّا بين العددين أ، جـ.

**مثال (٧)** ص ١٩٠ الأوساط الهندسية

أوجد وسطًا هندسيًّا بين العددين $\frac{١}{٣}$ ، ٢٧.

الحل:

الوسط الهندسي: $\sqrt{\frac{١}{٣} × ٢٧} = \sqrt{٩} = ٣$

و الوسط الهندسي: $-\sqrt{\frac{١}{٣} × ٢٧} = -\sqrt{٩} = -٣$

**حاول أن تحل**

٧ أوجد وسطًا هندسيًّا بين العددين في كل ما يلي:

أ -٣ ، -٧٢ $± \sqrt{-٣ × -٧٢} = ± \sqrt{٢١٦}$

ب ٢٠ ، ٨٠ ± ٤٠

جـ ٣ ، ١٨,٧٥ ± ٧,٥

## الأوساط الهندسية

**مثال (٨)** ص ١٩٠

عندما يتأرجح ولد دون تأثير قوة خارجية فإن مقاومة الهواء تؤدي إلى تناقص في طول قوس التأرجح. ويشكل التناقص في طول القوس متتالية هندسيّة. أوجد الوسط الهندسي لطولي القوسين (لأقرب عدد كلي.)


الحل:

الوسط الهندسي = $\sqrt{٢,٨ \times ٣,٢}$

= $\sqrt{٨,٩٦}$

$\simeq ٣$

الوسط الهندسي لطولي القوسين يساوي حوالى ٣ أمتار.

**حاول أن تحل** ص ١٩٠

(٨) يتدرب عماد على القفزة الثلاثية. حقق في المحاولة الأولى ٨,٨ أمتار وفي المحاولة الثانية ٩,٢ أمتار. ما الوسط الهندسي لطولي القفزتين؟ الوسط الهندسي = $\sqrt{٩,٢ \times ٨,٨} \simeq ٩$

**بصورةٍ عامة**

في المتتالية الهندسية (أ، ب، جـ، د، ...، ك، ل). تسمى ب، جـ، د، ...، ك **أوساطًا هندسية** للعددين الحقيقيين أ، ل.

وتسمى عملية إيجاد ب، جـ، د، ...، ك عملية إدخال أوساط هندسية بين العددين أ، ل.

**مثال (٩)** ص ١٩١

أدخل خمسة أوساط هندسيّة موجبة بين العددين ٥١٢ ، ٨.

الحل: (٥١٢، ■، ■، ■، ■، ■، ٨).

عدد حدود المتتالية الهندسية = عدد الأوساط + ٢.

ن = ٥ + ٢ = ٧

$ح_١ = ٥١٢$

$ح_ن = ٨$ أي أن $ح_٧ = ٨$

$\because ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ٨ = ٥١٢ \times ر^٦$

$ر^٦ = \frac{٨}{٥١٢} = \frac{١}{٦٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٦$

$ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = -\frac{١}{٢}$ مرفوضة لأن الأوساط موجبة.

الأوساط هي: ٢٥٦، ١٢٨، ٦٤، ٣٢، ١٦.

- ١٢٩ -

$ح_{١٠} = ١٠٢٤ = ح_{١} \times ر^{٩}$

$١٠٢٤ = ٢ \times ر^{٩}$ $\quad$ $ر^{٩} = ٥١٢$ $\quad$ $(ر = ٢)$

**حاول أن تحل** ص ١٩١

**٧** أدخل ثمانية أوساط هندسية بين ٢ ، ١٠٢٤.

الأوساط: ٤، ٨، ١٦، ٣٢، ٦٤، ١٢٨، ٢٥٦، ٥١٢

## مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية — Sum of n First Terms of a Geometric Sequence

**قانون** ص ١٩١

إذا كانت $(ح_{ن})$ متتالية هندسية، $جـ_{ن} = ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \dots + ح_{ن}$ هو مجموع ن حدًّا الأولى، فإن:

١ $جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

٢ إذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_{ن} = ن ح_{١}$

**البرهان** ص ١٩٢

كن ر أساس المتتالية.

$جـ_{ن} = ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \dots + ح_{ن}$

$جـ_{ن} = ح_{١} + ح_{١} ر + ح_{١} ر^{٢} + \dots + ح_{١} ر^{ن-١}$ $\quad$ (١)

$ر\, جـ_{ن} = ح_{١} ر + ح_{١} ر^{٢} + ح_{١} ر^{٣} + \dots + ح_{١} ر^{ن}$ $\quad$ (٢) $\quad$ بضرب طرفي المعادلة (١) في $ر \neq ٠$

ح (١) من (٢) وبالتبسيط ينتج:

$ر\, جـ_{ن} - جـ_{ن} = ح_{١} ر^{ن} - ح_{١}$

$\times (ر - ١) = ح_{١} (ر^{ن} - ١)$

$= ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

ذا كانت $ر = ١$ فإن حدود المتتالية متساوية فيكون مجموع الحدود = قيمة الحد الأول مضروبة في عدد الحدود أي

$= ح_{١} \times ن$.

### مثال (١٠) ص ١٩٣

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٢، ٤، ٨، ...).

الحل:

$ح_1 = ٢$ ، $ر = \frac{ح_2}{ح_1} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $ن = ١٠$

$$ج_ن = ح_1 \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$$

$$ج_{١٠} = \frac{٢ \times (٢^{١٠} - ١)}{(٢ - ١)}$$

$ج_{١٠} = ٢ \times ١٠٢٣ = ٢٠٤٦$.

### حاول أن تحل ص ١٩٣

١٠ أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية (٣، ٩، ٢٧، ...).

$ج_ن = ح_1 \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ ، $ج_8 = ٣ \frac{(٣^8 - ١)}{(٣ - ١)} = ٣٢٧٩$

### مثال (١١) ص ١٩٣

الحد الأول من متتالية هندسية يساوي ٨ والحد الثالث منها يساوي $\frac{٨}{٩}$ . أوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها.

الحل: ∵ المتتالية هندسية

$∴ ح_3 = ح_1 \times ر^2$

$\frac{٨}{٩} = ٨ \times ر^2$

$ر^2 = \frac{١}{٩}$

$ر = \frac{١}{٣}$ أو $ر = -\frac{١}{٣}$ .

إذا كانت $ر = \frac{١}{٣}$

$$ج_6 = ٨ \times \frac{١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^6}{١ - \frac{١}{٣}}$$

$$= ٨ \times \frac{١ - \left(\frac{١}{٣}\right)^6}{\frac{٢}{٣}}$$

$$= \frac{٢٩١٢}{٢٤٣} \simeq ١١,٩٨$$

إذا كانت $ر = -\frac{١}{٣}$

$$ج_6 = ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^6}{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)}$$

$$= ٨ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٣}\right)^6}{\frac{٤}{٣}}$$

$$= \frac{١٤٥٦}{٢٤٣} \simeq ٥,٩٩٢$$

$ح_1 = ٤ \quad ح_3 = ١ \quad ح_3 = ح_1 ر^2 \quad ١ = ٤ × ر^2 \quad ر^2 = \frac{1}{4}$

١٩٣ ص

اما $ر = \frac{1}{2}$ | $ر = -\frac{1}{2}$

$جـ_ن = ح_1 × \frac{ر^ن - 1}{ر - 1}$

$جـ_{10} = ٤ × \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{128}$ | $جـ_{10} = ٤ × \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{10}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{341}{128}$

**حاول أن تحل**

١١ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية $(٤، ▪، ١، ▪، \frac{1}{4}، ...)$

**مثال (١٢)** ١٢ / ٤ / ١

فكرت عائلة محمد بأن تقوم برحلة في أول شهر سبتمبر لمدة أسبوع، وكانت تكاليف الرحلة ١٣٧٥٠ دينارًا. ولكي تتوفر لدى محمد هذه التكلفة بدأ يوفّر من مصاريفه ١٢٥٠ دينارًا ابتداءً من شهر مارس على أن يزيد ما يوفره بمقدار ٢٠٪ كل شهر عن الشهر السابق له. هل يمكن أن يوفر محمد كل تكلفة الرحلة حتى يقوم بها في أول سبتمبر؟

الحل:

إذا وفر محمد س دينارًا في شهر ما، فسيوفر في الشهر التالي:

$س + \frac{٢٠}{١٠٠} × س = س + ٠,٢ س = ١,٢ س$

تشكل المبالغ المالية التي يوفرها محمد شهريًّا متتالية هندسية أساسها ١,٢.

يعطي القانون $جـ_ن = ح_1 × \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ مجموع ما يوفره محمد حيث

$ح_1 = ١٢٥٠$، $ر = ١,٢$، ن = ٦ (من أول مارس إلى أول سبتمبر)

$جـ_6 = ١٢٥٠ × \frac{(١,٢)^٦ - ١}{١,٢ - ١}$

$جـ_6 = ١٢٤١٢,٤$ دينارًا. باستخدام الآلة الحاسبة

لا تستطيع عائلة محمد القيام بالرحلة في أول سبتمبر.

**حاول أن تحل**

١٢ في المثال (١٢)، هل تستطيع العائلة القيام بالرحلة إذا جعلت التوفير ٢٥٪ زيادة عن كل شهر سابق؟

$ح_1 = ١٢٥٠ \quad ر = ١,٢٥ \quad ن = ٦$

$جـ_6 = ١٢٥٠ × \frac{(١,٢٥)^٦ - ١}{١,٢٥ - ١} = ١٤٠٧٣,٥$ دينار

تستطيع عائلة محمد القيام بالرحلة أول سبتمبر

ص ١٨٥

حاول أن تحل

(١٣) أوجد قيمة $\sum\limits_{\text{ن}=١}^{٨٠} \text{ن}$

$= \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} \left(\text{ح}_{١} + \text{ح}_{\text{ن}}\right)$

$\text{جـ}_{٨٠} = \frac{٨٠}{٢} \left(١ + ٨٠\right) = ٣٢٤٠$

---

ص ١٩٥

حاول أن تحل

(١٤) أوجد قيمة $\sum\limits_{\text{ن}=١}^{١٠} ٢\text{ن} = ٢ \times \frac{١٠ \times ١١}{٢} = ١١٠$

---

ص ١٩٦

**حاول أن تحل**

١٥ أوجد قيمة = $\sum\limits_{\text{ن}=١}^{٨} (٣\text{ن} + ٥)$.

$\text{ح}_{\text{ن}} = ٣\text{ن} + ٥$

$\text{ح}_{\text{ن}+١} = ٣\text{ن} + ٨$

$\text{ح}_{\text{ن}+١} - \text{ح}_{\text{ن}} = ٣$ ثابت

متتالية حسابية أساسها ٣

$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢} \left[٢\text{ح}_{١} + (\text{ن} - ١) \times \text{د}\right]$

$\text{جـ}_{٨} = \frac{٨}{٢} \left[٣ \times (٨ - ١) + ٨ \times ٢\right] = ١٤٨$

---

ص ١٩٧

حاول أن تحل

قيمة = $\sum\limits_{\text{ن}=١}^{١٠} ٢^{\text{ن}}$

$\text{ح}_{\text{ن}} = ٢^{\text{ن}}$

$\text{ح}_{\text{ن}+١} = ٢^{\text{ن}+١}$

$\frac{\text{ح}_{\text{ن}+١}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = ٢$ ثابت

متتالية هندسية حدها الأول ٢ وأساسها ٢

$\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ح}_{١} \times \frac{\text{ر}^{\text{ن}} - ١}{\text{ر} - ١} = ٢ \times \frac{٢^{١٠} - ١}{٢ - ١} = ٢٠٤٦$